الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

École Nationale Supérieure des Technologies Avancées

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

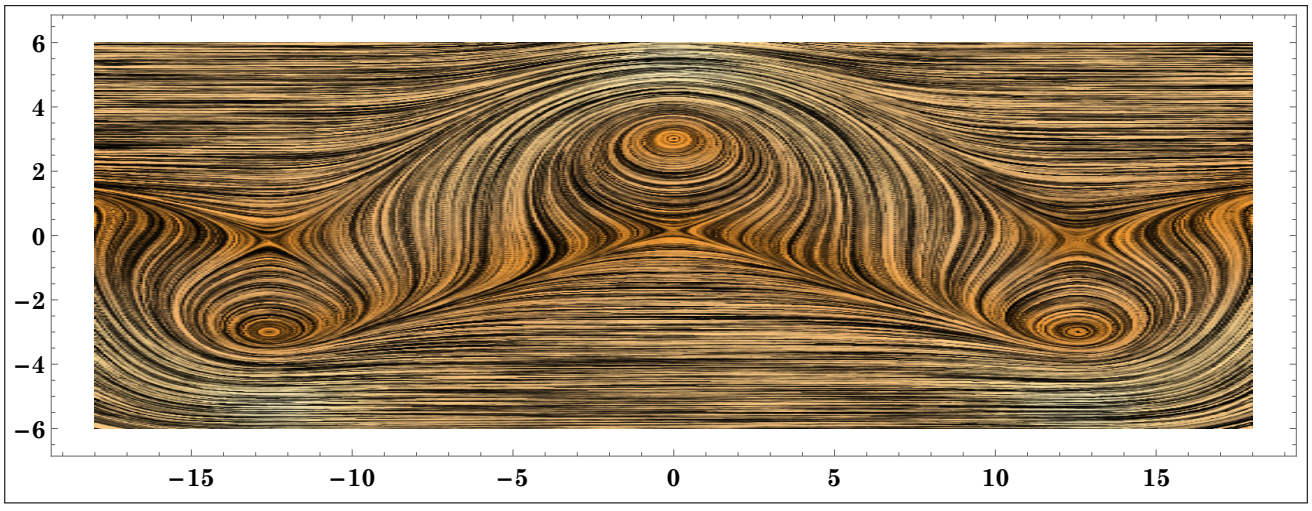
المدرسة الوطنية العليا للتكنولوجيات المتقدمة

Département de Génie des Procédés

Polycopié de Cours de Mécanique des Fluides Incompressibles

Préparé par :

Dr. Kamel BERKACHE



Année Académique : 2025/2026

Table des matières

1 Généralités sur la mécanique des fluides 2

1.1 Qu'est ce que la mécanique des fluides ? . . . 2
1.2 Description du mouvement . . . 2
1.2.1 Description de Lagrange . . . 2
1.2.2 Cinématique d'Euler . . . 3
1.3 Fluide Parfait . . . 4
1.3.1 Rappels Mécanique . . . 5
1.3.1.1 Notion de pression et échelle de pression . . . 5
1.3.1.2 Interprétation par la théorie cinétique des gaz . . . 5
1.3.1.3 Force de pression en un point d'un fluide . . . 7
1.3.2 Théorème de la quantité de mouvement . . . 8
1.3.3 Équations d'Euler pour $a_e = 0$ . . . 10
1.3.4 Équation de continuité-conservation de la masse . . . 11
1.3.4.1 Débit volumique . . . 11
1.3.4.2 Débit massique . . . 11
1.3.4.3 Équation de conservation de la masse . . . 12
1.3.5 Écoulements particuliers . . . 13
1.3.5.1 Écoulement permanent . . . 13
1.3.5.2 Écoulement incompressible . . . 13
1.3.5.3 Écoulement irrotationnel . . . 13
1.3.5.4 Écoulement incompressible et irrotationnel . . . 14
1.3.5.5 Fonction de courant . . . 15
1.3.5.6 Débit volumique entre deux lignes de courant . . . 15
1.3.5.7 Potentiel complexe . . . 16
1.3.6 Théorème de Bernoulli . . . 16
1.3.7 Théorème de Bernoulli avec échange de travail . . . 18
1.4 Exercices . . . 19

2 Équations générales des fluides réels 21

2.1 Théorèmes intégraux . . . 21
2.1.1 Théorème de la divergence (forme indicielle) . . . 22
2.1.2 Théorème d'Ostrogradsky . . . 22
2.1.3 Théorèmes de Green . . . 22
2.1.4 Théorème de Stokes . . . 22
2.1.5 Théorème de l'intégrale nulle . . . 22
2.2 Contraintes au sein d'un fluides réel . . . 23
2.2.1 Caractéristique de tenseur τ_{ij} . . . 24
2.2.2 Tenseur des contraintes de cisaillement pour un fluide newtonien . . . 24
2.3 Théorème de la quantité de mouvement . . . 25
2.3.1 Cas d'un fluide newtonien . . . 27

2.4 Théorème du moment cinétique . . . 27
2.4.1 Théorème de Kelvin : conservation de la circulation . . . 27
2.5 Théorème de l'énergie cinétique . . . 29
2.6 Théorème de Bernoulli généralisé . . . 30
2.6.1 Viscosité . . . 30
2.6.1.1 Viscosité dynamique . . . 31
2.6.1.2 Viscosité cinématique . . . 32
2.6.2 Équation de Bernoulli généralisée . . . 32
2.6.3 Différents régimes d'écoulement . . . 33
2.6.4 Diamètre hydraulique . . . 35
2.7 Pertes de charge . . . 35
2.7.1 Pertes de charge linéaires . . . 36
2.7.1.1 Distribution des contraintes . . . 36
2.7.1.2 Distribution des vitesses . . . 37
2.7.1.3 Débit volumique . . . 38
2.7.1.4 Coefficient de pertes de charge régulière . . . 38
2.7.2 Pertes de charge singulières . . . 39
2.8 Pompes et moyens de soufflage . . . 43
2.8.1 Pompes volumétriques . . . 44
2.8.1.1 Principe et caractéristiques générales . . . 44
2.8.1.2 Pompe à piston . . . 44
2.8.1.3 Pompe à diaphragme . . . 45
2.8.1.4 Pompe à piston plongeur . . . 45
2.8.1.5 Pompe à engrenage . . . 46
2.8.1.6 Pompe à palettes rigides . . . 47
2.8.1.7 Pompe péristaltiques . . . 47
2.8.1.8 Diagnostic des problèmes inhérents aux pompes volumétriques . . . 48
2.8.2 Pompes Hydrodynamiques ou Turbopompes . . . 48
2.8.2.1 Description et fonctionnement . . . 48
2.8.2.2 Avantages et inconvénients des turbo-pompes . . . 49
2.8.2.3 Pression différentielle engendrée par la pompe . . . 50
2.8.2.4 Caractéristique pression-débit . . . 51
2.8.2.5 Point de fonctionnement . . . 51
2.8.2.6 Caractéristiques de vitesse et Conditions d'aspiration – NPSH . . . 52
2.8.2.7 Amorçage d'une turbo-pompe . . . 53
2.9 Exercices . . . 54

3 Écoulement laminaire de fluides newtoniens 58
3.1 Loi rhéologique des fluides newtoniens . . . 58
3.2 Équations de Navier-Stokes . . . 59
3.3 Écoulement de Couette . . . 61
3.3.1 Écoulement avec une Surface Supérieure en Mouvement . . . 62
3.3.2 Résultats . . . 63
3.3.3 Écoulement de cisaillement sans gradient de pression . . . 64
3.4 Écoulement de Poiseuille . . . 65
3.5 Écoulement de Hagen-Poiseuille . . . 67
3.6 Écoulement dans une conduite annulaire . . . 70
3.7 Exercice . . . 71

4 Rhéologie et fluides complexes 76
4.1 Définitions : Cisaillement, contrainte de cisaillement, déformation, viscosité . . . 76
4.1.1 Contrainte de cisaillement . . . 76
4.1.2 Déformation . . . 77
4.1.3 Vitesse de cisaillement . . . 77
4.2 Viscosité . . . 77
4.2.1 Différentes définitions de la viscosité . . . 78
4.2.1.1 Viscosité dynamique ou apparente . . . 78
4.2.1.2 Viscosité cinématique . . . 78
4.2.1.3 Viscosité relative . . . 78
4.2.1.4 Viscosité spécifique . . . 78
4.2.1.5 Viscosité intrinsèque . . . 78
4.2.1.6 Viscosité complexe . . . 78
4.3 Fluides complexes (non-newtoniens) et lois rhéologiques . . . 78
4.3.1 Comportements purement visqueux . . . 79
4.3.1.1 Fluides rhéofluidifiants ou pseudoplastiques . . . 80
4.3.1.2 Modèles mathématiques pour le comportement des fluides pseudoplastiques 81
4.3.1.3 Modèle de loi puissance . . . 82
4.3.1.4 Modèle de Carreau . . . 82
4.3.1.5 Modèle de Cross . . . 83
4.3.1.6 Modèle d'Ellis . . . 83
4.3.2 Comportement viscoplastique . . . 83
4.3.2.1 Modèles mathématique du comportement viscoplastique . . . 85
4.3.2.2 Modèle de Bingham . . . 85
4.3.2.3 Modèle de Herschel-Bulkley . . . 85
4.3.2.4 Modèle de Casson . . . 85
4.3.3 Variation du comportement avec le temps . . . 85
4.3.3.1 Thixotropie . . . 86
4.3.4 Comportement viscoélastique . . . 87
4.3.4.1 Contraintes normales dans les écoulements de cisaillement stationnaires . 88
4.3.4.2 Écoulement élongationnal . . . 90
4.3.4.3 Modèles mathématiques pour le comportement viscoélastique . . . 92
4.4 Rhéomètrie . . . 94
4.4.1 Rhéométrie en cisaillement : écoulements entraînés . . . 94
4.4.1.1 Plaques Glissantes, Bille en Chute . . . 96
4.4.1.2 Cylindre en Chute . . . 97
4.4.1.3 Bille en Chute . . . 98
4.4.1.4 Bille Roulante . . . 99
4.4.1.5 Rhéomètre à Cylindres Coaxiaux . . . 99
4.4.1.6 Rhéomètre Cône-Plan . . . 106
4.4.1.7 Disques Parallèles . . . 110
4.4.2 Rhéométrie de Cisaillement : Écoulements Entraînés par Pression . . . 114
4.4.2.1 Rhéomètre Capillaire . . . 115
4.5 Exercice . . . 119

5 Théorie de la similitude 121
5.1 Fondements de l'Analyse Dimensionnelle . . . 121
5.1.1 Le Théorème de Vaschy-Buckingham . . . 121
5.1.2 Justification du Théorème . . . 122
5.1.3 Méthodologie d'Application . . . 122

5.2 Exemple d'Application : Machine Traversée par un Gaz . . . 123
5.2.1 Définition du Problème . . . 123
5.2.2 Tableau Dimensionnel . . . 123
5.2.3 Résolution du Système . . . 123
5.2.4 Formulation Adimensionnelle . . . 124
5.2.5 Nombres Sans Dimension Classiques . . . 124
5.3 Théorie de la Similitude . . . 124
5.3.1 Mise en Évidence des Écoulements Semblables . . . 124
5.3.1.1 Équation de Navier-Stokes Adimensionnelle . . . 124
5.3.1.2 Conditions de Similitude . . . 125
5.3.2 Conditions Générales de Similitude . . . 125
5.3.2.1 Similitude Géométrique . . . 125
5.3.2.2 Similitude Cinématique . . . 125
5.3.2.3 Similitude Dynamique . . . 125
5.4 Nombres Sans Dimension Principaux . . . 126
5.4.1 Nombre d'Euler . . . 126
5.4.2 Nombre de Froude . . . 126
5.4.3 Nombre de Reynolds . . . 126
5.4.4 Nombre de Weber . . . 126
5.4.5 Nombre de Grashof . . . 126
5.5 Similitude Énergétique . . . 127
5.5.1 Équation de l'Énergie . . . 127
5.5.2 Nombre d'Eckert . . . 127
5.5.3 Nombre de Prandtl . . . 127
5.5.4 Nombre de Péclet . . . 127
5.5.5 Nombre de Nusselt . . . 127
5.5.6 Nombre de Stanton . . . 128
5.6 Applications Pratiques et Limitations . . . 128
5.6.1 Respect des Conditions de Similitude . . . 128
5.6.2 Distorsion Géométrique . . . 128
5.6.3 Conditions aux Limites et Initiales . . . 128
5.7 Synthèse des Conditions de Similitude . . . 128
5.8 Exercices . . . 129

6 Théorie de la couche limite 132
6.1 Grandes lignes de la théorie de la couche limite . . . 132
6.1.1 Couche limite sur plaque plane . . . 133
6.1.2 Cavité entraînée . . . 134
6.1.3 Écoulement autour de deux cylindres . . . 135
6.2 Estimation de l'épaississeur de la couche limite par analyse dimensionnelle . . . 136
6.3 Analyse des échelles dominantes dans la couche limite . . . 138
6.3.1 Épaisseur de déplacement . . . 138
6.3.2 Épaisseur de quantité de mouvement . . . 139
6.3.3 Épaisseur d'énergie cinétique, d'enthalpie et d'enthalpie d'arrêt . . . 141
6.4 Équations de la couche limite sur plaque plane . . . 141
6.4.1 Solution de Blasius . . . 143
6.4.2 Solution approchée de Von Kármán–Pohlhausen . . . 145
6.4.2.1 Procédure d'approximation simple . . . 146
6.4.3 Applications numériques et cas particuliers . . . 152
6.4.3.1 Cas 1 : Plaque plane ($\Lambda = 0$) . . . 152

6.4.3.2 Cas 2 : Écoulement sur un cylindre circulaire 153
6.4.3.3 Cas 3 : Écoulement avec gradient de pression favorable constant 153
6.4.3.4 Cas 4 : Écoulement dans un convergent 154
6.4.3.5 Limites de la méthode de Pohlhausen 155
6.4.3.6 Tableau récapitulatif 155
6.5 Exercices 155

Bibliographie **158**

Avant-propos

La mécanique des fluides constitue une discipline fondamentale pour l'ingénieur en génie des procédés. Qu'il s'agisse du transport de liquides dans des canalisations, de la conception de réacteurs agités ou de la modélisation d'écoulements gazeux, la maîtrise des principes physiques régissant le mouvement des fluides est indispensable pour dimensionner, optimiser et sécuriser les installations industrielles.

Ce polycopié, destiné aux étudiants de première année second cycle en génie des procédés, a été conçu pour fournir les fondements théoriques et les outils méthodologiques nécessaires à l'analyse des écoulements incompressibles. Il ambitionne de vous accompagner dans l'acquisition des compétences clés : formulation des bilans (masse, quantité de mouvement, énergie), résolution des équations de conservation, et interprétation physique des phénomènes observés. La structure de ce cours suit une progression pédagogique rigoureuse.

Le premier chapitre jette les bases en introduisant les descripteurs du mouvement et les concepts de fluide parfait, aboutissant au théorème de Bernoulli. Le deuxième chapitre approfondit la modélisation en intégrant la viscosité et en établissant les équations générales des fluides réels, incluant les notions de pertes de charge et le dimensionnement des pompes. Les troisième et quatrième chapitres traitent des écoulements laminaires newtoniens et des comportements rhéologiques complexes (fluides non-newtoniens), indispensables à la compréhension des matériaux rencontrés dans l'industrie (polymères, suspensions, produits alimentaires). Le cinquième chapitre introduit la théorie de la similitude et l'analyse dimensionnelle, outils puissants permettant de transposer les résultats expérimentaux de la maquette au prototype. Enfin, le sixième chapitre clôt cet ensemble par l'étude de la couche limite, phénomène clé pour appréhender les interactions entre un écoulement et une paroi solide.

Nous espérons que ce travail saura éveiller votre curiosité scientifique et constituera une référence solide pour la suite de votre parcours académique et professionnel.

Chapitre 1

Généralités sur la mécanique des fluides

1.1 Qu'est ce que la mécanique des fluides ?

La mécanique des fluides est une branche de la physique qui étudie le comportement des fluides, c'est-à-dire des liquides et des gaz, ainsi que les forces qui agissent sur eux. Elle explore les principes fondamentaux qui régissent le mouvement des fluides et les interactions entre les fluides et les surfaces solides.

Les principaux concepts de la mécanique des fluides incluent la pression, la densité, la viscosité, la vitesse, l'écoulement laminaire et turbulent, ainsi que les lois de conservation de la masse et de la quantité de mouvement. Cette discipline est utilisée pour comprendre et modéliser une variété de phénomènes, tels que le vol des avions, la circulation sanguine dans le corps humain, la météorologie, les écoulements de fluides industriels, les phénomènes océaniques, et bien d'autres.

Les équations fondamentales de la mécanique des fluides, comme les équations de Navier-Stokes, décrivent le comportement des fluides et sont utilisées dans la modélisation et la simulation numérique pour résoudre des problèmes complexes liés aux écoulements fluides.

1.2 Description du mouvement

En mécanique des solides, il est simple de décrire le mouvement d'une particule ou d'un corps rigide. En revanche, les particules d'un fluide en mouvement se déplacent de manière plus compliquée et il n'est pas pratique de suivre le mouvement de chaque particule. Ceci dit, il y a deux façons pour décrire le mouvement d'un fluide. La première méthode (appelée APPROCHE LAGRANGIENNE) consiste à sélectionner un corps puis à décrire le mouvement de ce corps. La deuxième méthode (appelée APPROCHE EULÉRIENNE) consiste à sélectionner une région dans l'espace, puis à décrire le mouvement qui se produit aux points de l'espace. De plus, l'approche eulérienne permet d'évaluer des propriétés à des emplacements spatiaux en fonction du temps car elle utilise des champs.

1.2.1 Description de Lagrange

On étudie le mouvement de chaque particule, c'est à dire : on suit chacune des particules dans son déplacement, et on identifie chaque particule P par sa position initiale $M_0(x_0, y_0, z_0)$ à un instant t_0. A un instant t, la particule P va occuper la position $M(x, y, z)$ et dans ce cas la relation donnant la position de P à l'instant t s'écrit :

$$\overrightarrow{OM} = \vec{F}(\overrightarrow{OM}_0, t) \tag{1.1}$$

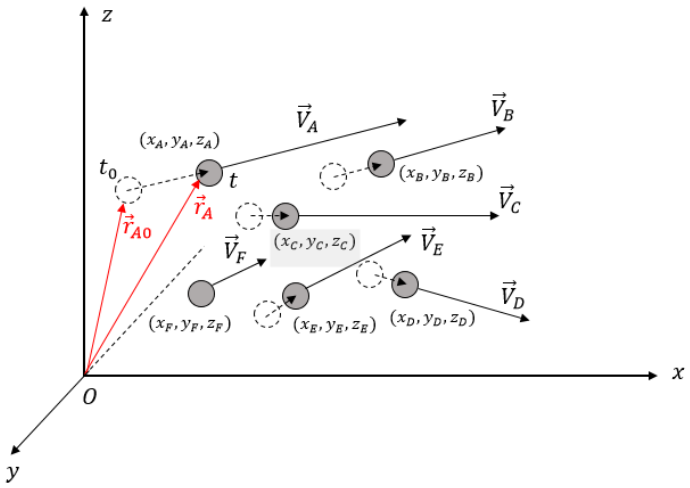


FIG. 1: Description Lagrangienne

Ceci se traduit par :

$$\overrightarrow{OM} = \left| \begin{array}{l} x = f(x_0, y_0, z_0, t) \\ y = g(x_0, y_0, z_0, t) \\ z = h(x_0, y_0, z_0, t) \end{array} \right. \tag{1.2}$$

avec x_0, y_0, z_0 sont les variables de Lagrange, et avec ça on arrive à définir :

- La trajectoire des particules
- La ligne matérielle
- La ligne d'émission

La vitesse et l'accélération sont définies par :

$$\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{\partial \vec{F}(\overrightarrow{OM}_0, t)}{\partial t} \tag{1.3}$$

$$\vec{\Gamma} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = \frac{\partial^2 \vec{F}(\overrightarrow{OM}_0, t)}{\partial t^2} \tag{1.4}$$

1.2.2 Cinématique d'Euler

On étudie ce qui se passe au cours du temps en chaque point de l'espace sans faire intervenir l'individualité des particules. Pour cela on donne un champ de vitesse (ensemble de vecteurs en un point M) où on peut définir la fonction vectorielle $\vec{V} = \vec{V}(\overrightarrow{OM}, t)$ dont la valeur est le vecteur vitesse, en coordonnées cartésiennes

$$\vec{V} = \left| \begin{array}{l} V_x(x, y, z, t) \\ V_y(x, y, z, t) \\ V_z(x, y, z, t) \end{array} \right. \tag{1.5}$$

où (x, y, z) sont les variables d'Euler. Avec ça, on peut définir :

- La ligne de courant (ensemble de points où le vecteur $\vec{V}$ est tangent)
- Écoulement permanent ou non
- Dérivée Eulérienne ou particulière

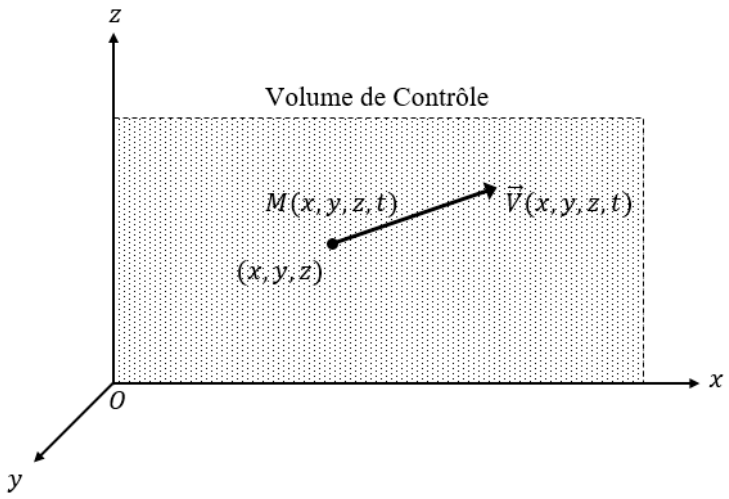


FIG. 2: Description Eulérienne (inspiré de ([1])

Pour déterminer la dérivée particulaire, on suppose un mouvement connu dans la représentation eulérienne et on se donne $\vec{V} = \vec{V}(x, y, z, t)$.
1. Cas d'un scalaire $g = g(x, y, z, t)$:

$$\frac{Dg}{Dt} = \frac{\partial g}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})g \tag{1.6}$$

2. Cas d'un vecteur $\vec{g} = \vec{g}(x, y, z, t)$:

$$\frac{D\vec{g}}{Dt} = \frac{\partial \vec{g}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})\vec{g} \tag{1.7}$$

Si $\vec{g}$ est le vecteur vitesse $\vec{V}$, alors on trouve l'accélération comme

$$\vec{\Gamma} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})\vec{V} \tag{1.8}$$

et qu'on peut mettre sous la forme :

$$\vec{\Gamma} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{V^2}{2}\right) - \vec{V} \times \overrightarrow{\text{rot}}\vec{V} \tag{1.9}$$

3. Dérivée Eulérienne d'une intégrale de volume :
Soit l'intégrale de volume $I = \iiint_{\mathcal{V}} G(x, y, z) d\mathcal{V}$

$$\frac{dI}{dt} = \frac{d}{dt}\iiint_{\mathcal{V}} G(x, y, z) d\mathcal{V} = \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\partial G}{\partial t} d\mathcal{V} + \iint_{\mathcal{S}} G \cdot \vec{V} \cdot \vec{n}\, d\mathcal{S} \tag{1.10}$$

1.3 Fluide Parfait

Un fluide idéal a une viscosité nulle. Aucune force de cisaillement n'est impliquée dans sa déformation. Un fluide idéal doit également être incompressible. La contrainte de cisaillement est nulle, quelle que soit la valeur de du/dy.

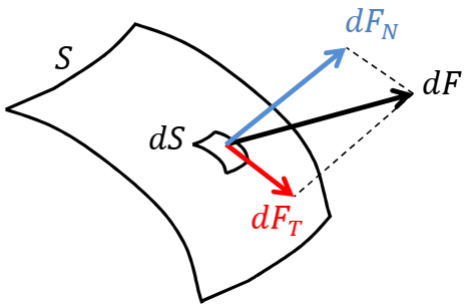


FIG. 3: Forces normales et forces de cisaillement

1.3.1 Rappels Mécanique

1.3.1.1 Notion de pression et échelle de pression

La pression est une caractéristique générale d'un fluide qui s'exerce perpendiculairement à une surface solide ou à tout plan traversant le fluide. Considérons une petite surface (dS) à la surface d'un objet (Figure 3). Soit dF la force agissant sur cette zone élémentaire dS. Cette force peut être décomposée en deux composantes : (i) dF_N le long de la normale à la petite surface dS, également appelée force normale ou force de pression, et (ii) dF_T le long du plan de la petite surface dS, également appelée force tangentielle ou force de cisaillement. La force normale exercée par un fluide par unité de surface est appelée pression ou intensité de la pression (p), et dans le cas des solides, elle est appelée contrainte normale. La force tangentielle par unité de surface est appelée contrainte de cisaillement ou contrainte tangentielle (τ). Ainsi, l'expression de la pression est donnée comme suit :

$$p = \lim_{dS \to 0} \frac{dF_N}{dS} \tag{1.11}$$

La contrainte de cisaillement est donnée par

$$\tau = \lim_{dS \to 0} \frac{dF_T}{dS} \tag{1.12}$$

Dans les fluides au repos, il n'y a pas de force de cisaillement, et par conséquent, la force exercée est perpendiculaire à la surface du récipient contenant. Cette force normale par unité de surface est appelée pression, qui est mesurée en N/m^2 ou en Pascal.

1.3.1.2 Interprétation par la théorie cinétique des gaz

Les gaz ont été définis comme des fluides dans lesquels les molécules peuvent se déplacer librement et sont éloignées les unes des autres, se heurtant occasionnellement. Ce modèle a conduit Daniel Bernoulli en 1738 à expliquer la pression dans les gaz en se basant sur ce type de mouvement moléculaire. Bernoulli a considéré un récipient cylindrique rempli de gaz, comme illustré dans la figure 4. Alors que les molécules se déplacent à l'intérieur du récipient, elles heurtent également les parois.

À présent, nous pouvons négliger les collisions intermoléculaires et supposer que lorsqu'une molécule heurte la paroi, elle rebondira sans perte d'énergie (collision élastique). Cette hypothèse inclut également les collisions élastiques pures avec les parois du cylindre. Par conséquent, les forces totales résultant de ces collisions doivent exercer une pression sur les parois du récipient. Par exemple, la particule dans la Figure 4 (marquée par la lettre A) qui heurte le dessus a une vitesse de :

$$u = (u_x, u_y, u_z) \tag{1.13}$$

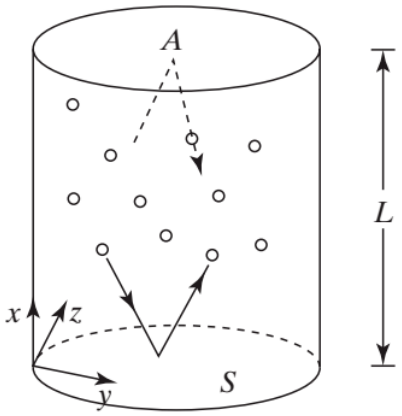


FIG. 4: Molécules de gaz se déplaçant de manière aléatoire à l'intérieur d'un récipient.

et quand elle percute la partie supérieure, le changement de sa quantité de mouvement linéaire dans la direction x est de

$$\Delta \mathcal{P} = 2mu_x \tag{1.14}$$

où le 2 est le résultat de la collision élastique, m est la masse de la molécule et u_x est la composante de la vitesse dans la direction x. Étant donné que la particule est contenue à l'intérieur du cylindre et rebondit continuellement, nous pouvons estimer le temps t entre ces collisions sur la paroi supérieure par

$$\Delta t = \frac{2L}{u_x} \tag{1.15}$$

où L représente la longueur du cylindre. La force résultant des collisions de cette particule, en se basant sur la théorie de la quantité de mouvement de Newton, est la suivante :

$$F = \frac{d\mathcal{P}}{dt} = \frac{d(mu_x)}{dt} = \frac{\Delta(mu_x)}{\Delta t} = \frac{2mu_x}{\frac{2L}{u_x}} = \frac{mu_x^2}{L} \tag{1.16}$$

Les particules ont tendance à se déplacer à la même vitesse dans n'importe quelle direction et on a

$$u^2 = u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 \tag{1.17}$$

si toutes les directions sont de même ordre de grandeur, nous pouvons supposer que

$$u^2 \approx 3u_x^2 \tag{1.18}$$

Maintenant, supposons qu'il y ait N particules dans le récipient ; par conséquent, la force due au gaz à l'intérieur est la suivante :

$$F = N \cdot \frac{m\frac{u^2}{3}}{L} \tag{1.19}$$

La pression est simplement la force par unité de surface :

$$p = N \cdot \frac{m\frac{u^2}{3}}{LS} \tag{1.20}$$

qui donne

$$\boxed{p = \frac{N}{V} \cdot \frac{1}{3}mu^2} \tag{1.21}$$

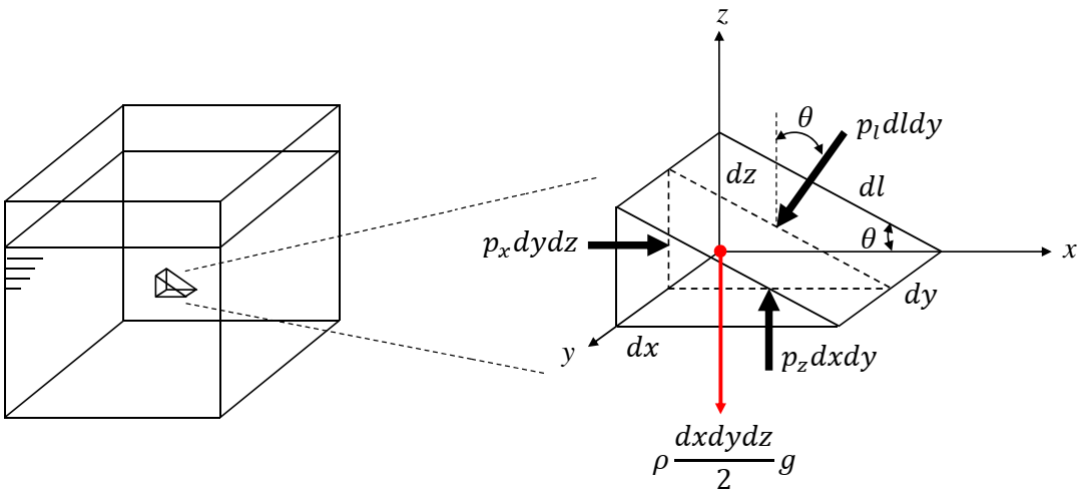


FIG. 5: Forces sur un élément de fluide en forme de coin arbitraire

1.3.1.3 Force de pression en un point d'un fluide

Comme nous l'avons brièvement discuté, le terme "pression" est utilisé pour indiquer la force normale par unité de surface en un point donné agissant sur un plan donné à l'intérieur de la masse de fluide objet d'étude. Une question qui se pose immédiatement est de savoir comment la pression en un point varie en fonction de l'orientation du plan passant par ce point. Pour répondre à cette question, considérons le diagramme de corps libre, illustré sur la Figure 5, qui a été obtenu en enlevant un petit coin triangulaire de fluide d'un emplacement quelconque à l'intérieur d'un fluide.

Puisque nous examinons la situation où il n'y a pas de contraintes de cisaillement, les seules forces externes agissant sur l'élément de fluide sont dues à la pression et au poids. Pour simplifier, les forces dans la direction y ne sont pas montrées, et l'axe z est pris comme l'axe vertical, de sorte que le poids agit dans la direction négative de z. Bien que nous nous intéressions principalement aux fluides au repos, pour rendre l'analyse aussi générale que possible, nous permettrons à l'élément de fluide d'avoir un mouvement accéléré. L'hypothèse de l'absence de contraintes de cisaillement restera valable tant que l'élément de fluide se déplacera comme un corps rigide, c'est-à-dire qu'il n'y aura pas de mouvement relatif entre les éléments adjacents.

Les équations du mouvement (deuxième loi de Newton $\vec{F} = m\vec{a}$) dans les directions x et z sont, respectivement :

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 \quad &\Rightarrow \quad p_x dydz - p_l dldy \sin\theta = \rho \frac{dxdydz}{2} a_x \\ \sum F_z = 0 \quad &\Rightarrow \quad p_z dxdy - p_l dldy \cos\theta - \rho \frac{dxdydz}{2} g = \rho \frac{dxdydz}{2} a_z \end{aligned} \tag{1.22}$$

où p_l, p_x et p_z sont les pressions moyennes sur les faces, ρ est la masse volumique du fluide et a_x et a_z les accélérations. Notez qu'une pression doit être multipliée par une surface appropriée pour obtenir la force générée par la pression. Il découle de la géométrie que :

$$dx = dl \cos\theta \quad \text{et} \quad dz = dl \sin\theta \tag{1.23}$$

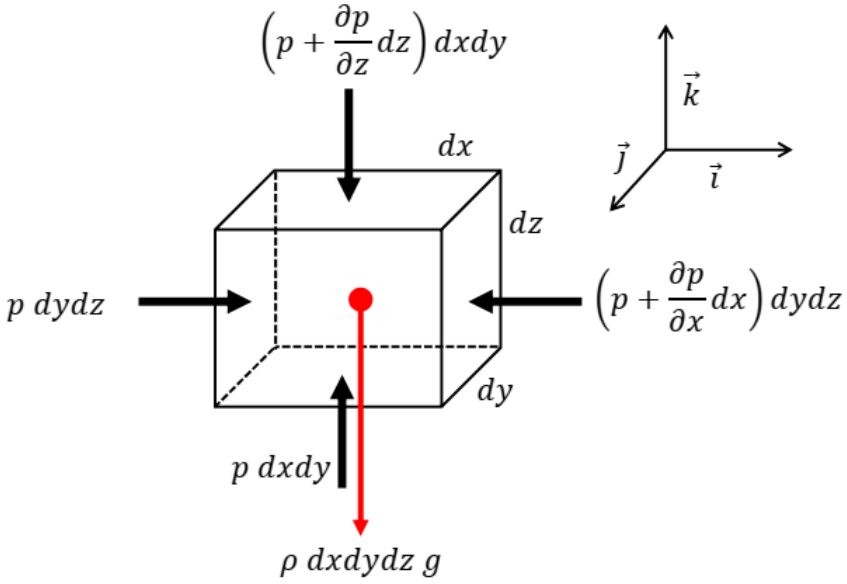


FIG. 6: Forces de surface et de volume agissant sur un petit élément de fluide.

de sorte que les équations du mouvement peuvent être réécrites comme :

$$\begin{aligned} p_x - p_l &= \rho a_x \frac{dx}{2} \\ p_z - p_l &= \rho(g + a_z)\frac{dz}{2} \end{aligned} \tag{1.24}$$

Puisque nous nous intéressons vraiment à ce qui se passe en un point, nous prenons la limite lorsque dx, dy et dz approchent zéro (tout en maintenant l'angle), et il en résulte que :

$$\begin{aligned} p_x - p_l &= 0 \\ p_z - p_l &= 0 \end{aligned} \tag{1.25}$$

ou

$$\boxed{p_l = p_x = p_z} \tag{1.26}$$

L'angle a été choisi de manière arbitraire, nous pouvons donc conclure que la pression en un point dans un fluide au repos ou en mouvement est indépendante de la direction tant qu'il n'y a pas de contraintes de cisaillement présentes. Ce résultat important est connu sous le nom de ***loi de Pascal***, en l'honneur de Blaise Pascal (1623-1662), un mathématicien français qui a apporté d'importantes contributions dans le domaine de l'hydrostatique.

1.3.2 Théorème de la quantité de mouvement

Bien que nous ayons répondu à la question de la variation de la pression en un point en fonction de la direction, nous sommes maintenant confrontés à une question tout aussi importante : comment la pression dans un fluide, dans lequel il n'y a pas de contraintes de cisaillement (au repos relatif et pas absolu), varie-t-elle de point en point ? Pour répondre à cette question, nous considérons un petit élément rectangulaire de fluide prélevé à une position quelconque à l'intérieur de fluide, comme illustré sur la Figure 6. Deux types de forces agissent sur cet élément : des forces de surface dues à la pression F_s et des forces massiques F_m.

Les forces massiques se divisent en deux types aussi ; le poids W et les forces qui sont dues au mouvement relatif du repère qui porte le fluide par rapport au repère fixe qui est le sol dans notre cas $dm \cdot \vec{a_e}$.

En désignant la pression sur les trois premières faces par p, nous exprimons la pression moyenne sur les

trois autres différentes faces en fonction de p et de ses dérivées, comme illustré dans la Figure 6. Nous utilisons un développement en série de Taylor pour approximer les pressions à courte distance, négligeant les termes d'ordre supérieur à mesure que dx et dy approchent zéro. Pour simplifier, les forces de surface dans la direction x ne sont pas montrées. La force de surface résultante dans la direction y est :

$$dF_x = pd_y d_z - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx\right) dydz \tag{1.27}$$

qui donne

$$dF_x = -\frac{\partial p}{\partial x} dxdydz \tag{1.28}$$

De même, pour les directions x et z les résultantes des forces de surfaces sont :

$$dF_y = -\frac{\partial p}{\partial y} dydxdz \tag{1.29}$$

et

$$dF_z = -\frac{\partial p}{\partial z} dzdxdy \tag{1.30}$$

La résultante des forces de surface appliquée sur l'élément de volume peut être exprimée sous forme vectorielle comme :

$$d\vec{F}_s = dF_x \cdot \vec{i} + dF_y \cdot \vec{j} + dF_z \cdot \vec{k} \tag{1.31}$$

Ou

$$d\vec{F}_s = -\left(\frac{\partial p}{\partial x} \cdot \vec{i} + \frac{\partial p}{\partial y} \cdot \vec{j} + \frac{\partial p}{\partial z} \cdot \vec{k}\right) dxdydz \tag{1.32}$$

Ainsi, la force de surface résultante par unité de volume peut être exprimée comme suit :

$$\frac{d\vec{F}_s}{dxdydz} = -\nabla p \tag{1.33}$$

Étant donné que l'axe z est vertical, le poids de l'élément est

$$-dW \cdot \vec{k} = -\rho g \cdot dxdydz \cdot \vec{k} \tag{1.34}$$

où le signe négatif indique que la force due au poids est dirigée vers le bas (dans la direction négative de l'axe z). dans le repère qui porte le fluide, nous appliquons la première loi de newton

$$\sum d\vec{F} = 0 \tag{1.35}$$

où $\sum dF$ représente la force résultante agissant sur l'élément, a est l'accélération d'entrainement. dm est la masse de l'élément, qui peut être écrite comme $\rho dxdydz$. Il en découle que :

$$\sum d\vec{F} = d\vec{F}_s - dW \cdot \vec{k} - dm\ \vec{a_e} = 0 \tag{1.36}$$

Ou

$$-\nabla p\ dxdydz - \rho g\ dxdydz\ \vec{k} - \rho\ dxdydz\ \vec{a_e} = 0 \tag{1.37}$$

et, par conséquent

$$-\nabla p - \rho g\ \vec{k} - \rho\ \vec{a_e} = 0 \tag{1.38}$$

ce qui donne :

$$\nabla p = -\rho g\ \vec{k} - \rho\ \vec{a_e} \tag{1.39}$$

qu'on peut écrire sous la forme finale

$$\boxed{\nabla p = \rho(\vec{g} - \vec{a_e})} \tag{1.40}$$

Cette dernière equation est appelé ***Équation d'Euler***

1.3.3 Équations d'Euler pour $a_e = 0$

Dans le cas où il n'y a pas de force massique qui sont dues à l'accélération d'entrainement (accélération du repère R' qui porte le fluide comme un récipient, un tube en U, une conduite,...etc par rapport au repère fixe R qui est le sol dans notre cas), l'équation devient :

$$\nabla p = \rho \vec{g} = -\rho g \ \vec{k} \tag{1.41}$$

qu'on peut développer comme suit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= -\rho g \end{aligned} \tag{1.42}$$

On remarque que la pression ne dépend que de z et on peut écrire :

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g \tag{1.43}$$

L'équation (1.43) est l'équation fondamentale pour les fluides au repos et peut être utilisée pour déterminer comment la pression change avec l'élévation. Cette équation indique que le gradient de pression dans la direction verticale est négatif ; c'est-à-dire que la pression diminue lorsque nous nous déplaçons vers le haut dans un fluide au repos. Il n'est pas nécessaire que soit une constante. Ainsi, elle est valide pour les fluides avec une masse volumique constante, tels que les liquides, ainsi que pour les fluides dont la masse volumique peut varier avec l'élévation, tels que l'air ou d'autres gaz. Cependant, pour procéder à l'intégration de l'équation (1.43), il est nécessaire de stipuler comment la masse volumique varie avec z.

Étant donné que le poids spécifique est égale au produit de la densité du fluide et de l'accélération due à la gravité $\gamma = \rho \cdot g$, les variations de γ sont provoquées par un changement de l'une ou l'autre de ces deux quantités. Pour la plupart des applications d'ingénierie, la variation de g est négligeable, donc notre principale préoccupation réside dans la possible variation de la densité du fluide. En général, un fluide dont la densité est constante est appelé fluide incompressible. Pour les liquides, la variation de densité est généralement négligeable, même sur de grandes distances verticales, de sorte que l'hypothèse d'une masse volumique constante est valide lorsqu'il s'agit de liquides. Dans ce cas, l'équation (1.43) peut être directement intégrée. Cherchons la pression au point M dans le récipient :

$$\int_{p(z)}^{p(z_0)} dp = \int_{z}^{z_0} -\rho g dz \tag{1.44}$$

$$p(z_0) - p(z) = -\rho g (z_0 - z) \tag{1.45}$$

Mais $p(z_0) = p_a$, alors :

$$\boxed{p(z) = p_a + \rho g (z_0 - z)} \tag{1.46}$$

ou bien en fonction de la profondeur h :

$$\boxed{p(M) = p_a + \rho g h} \tag{1.47}$$

L'équation (1.46) ou (1.47) s'appellent ***Équation fondamentale de l'hydrostatique***

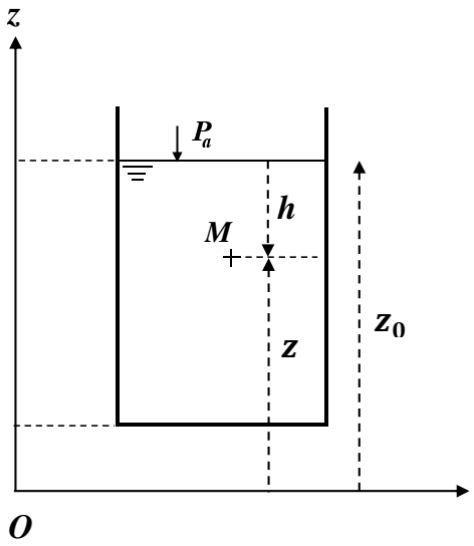


FIG. 7: Cas d'un récipient au repos

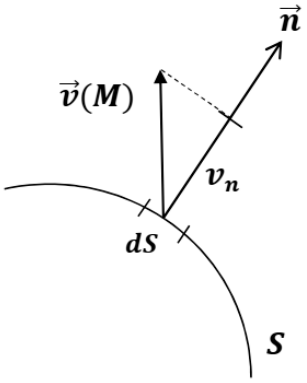


FIG. 8: flux de $\vec{v}$ à travers S

1.3.4 Équation de continuité-conservation de la masse

1.3.4.1 Débit volumique

On appelle débit volumique Q_v à travers une surface S orientée, le volume qui traverse S par unité du temps. C'est le flux du vecteur vitesse à travers une section.

$$Q_v = \iint_S \vec{v}(M) \cdot \vec{n} \cdot dS = \iint_S v_n \cdot dS = v_n \cdot S \tag{1.48}$$

$$\boxed{Q_v = v_n \cdot S} \tag{1.49}$$

1.3.4.2 Débit massique

On le note Q_m et est défini comme la masse qui traverse toute surface S normale aux lignes de courant pendant l'unité du temps. Pendant un temps dt, le volume de matière dV qui traverse dS est celle contenue dans le cylindre de base dS et de hauteur $\vec{v} \cdot \vec{n} \cdot dt = v_n \cdot dt$. Le débit massique élémentaire est défini comme :

$$dQ_m = \frac{dm}{dt} = \frac{\rho dV}{dt} = \frac{\rho \cdot v_n \cdot dt \cdot dS}{dt} = \rho \cdot v_n \cdot dS = \rho \cdot \vec{v} \cdot \vec{n} \cdot dS \tag{1.50}$$

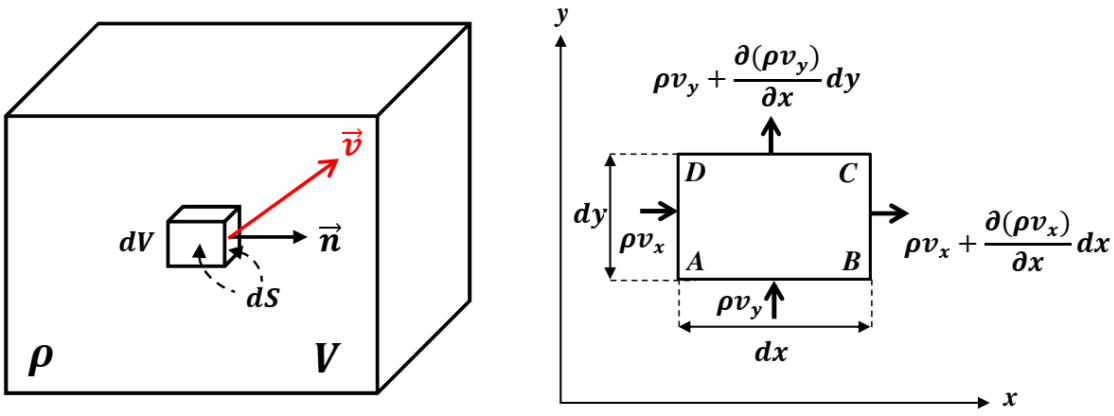


FIG. 9: bilan de la masse

qui mène à :

$$\boxed{Q_m = \iint_S \rho \cdot \vec{v} \cdot \vec{n} \cdot dS = \rho \cdot v_n \cdot S} \tag{1.51}$$

Qu'on peut exprimer aussi comme :

$$\boxed{Q_m = \iint_S \vec{j} \cdot \vec{n} \cdot dS} \tag{1.52}$$

Où $\vec{j} = \rho\vec{v}$ est le vecteur densité de courant ou vecteur densité de flux de masse de l'écoulement.

1.3.4.3 Équation de conservation de la masse

Soit un volume V délimité par une surface S fixe. Toute la masse se conserve dans V si le taux de sa variation pendant dt est compensé par le débit massique sortant ou entrant à travers S. Supposons que $dV = dxdydz$ et projetons le sur le plan xOy :

- $\rho \cdot dxdydz$: masse du liquide dans le volume dV à l'instant t.
- $v_x \cdot dydz \cdot dt$: volume entrant par la face AD pendant dt.
- $\rho v_x \cdot dydz \cdot dt$: masse du volume entrant par la face AD pendant dt.
- $\left[\rho v_x + \left(\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} dx\right)\right] dydz \cdot dt$: masse qui sort par la face BC pendant dt.
- $\left[\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x}\right] dx \cdot dydz \cdot dt$: masse perdue suivant l'axe des x à travers les deux faces.

Donc, pour l'ensemble de 6 faces du parallélépipède, la masse du liquide perdue est :

$$dm = \left[\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z}\right] dx \cdot dy \cdot dz \cdot dt \tag{1.53}$$

Or, on a aussi :

$$dm = -\left[\frac{\partial \rho}{\partial t}\right] dt \cdot dx \cdot dy \cdot dz \tag{1.54}$$

De l'égalité des deux équations, on a :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = 0 \tag{1.55}$$

C'est l'équation de continuité en coordonnées cartésiennes. On peut la mettre sous la forme :

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + div\ \rho\vec{v}} \tag{1.56}$$

Or,

$$div\ \rho\vec{v} = \rho \cdot div\ \vec{v} + \vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}\rho \tag{1.57}$$

La forme locale de l'équation de conservation de la masse peut s'écrire aussi :

$$\boxed{\frac{D\rho}{Dt} + \rho \cdot div\ \vec{v} = 0} \tag{1.58}$$

1.3.5 Écoulements particuliers

1.3.5.1 Écoulement permanent

En un point donné, les champs de vitesse et de masse volumique ne dépendent pas du temps ;

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \vec{\rho}}{\partial t} = 0$$

L'équation locale de conservation de la masse devient :

$$\boxed{div\ \rho\vec{v} = 0} \tag{1.59}$$

En régime permanent, le débit massique se conserve à travers toute section d'un tube de courant.

1.3.5.2 Écoulement incompressible

Principalement orienté vers les liquides, ce type d'écoulement s'étend également aux gaz, à condition que les variations de pression ne soient pas trop prononcées. Cette condition est généralement validée dans le cas des gaz présentant des nombres de Mach inférieurs à l'unité, indiquant des écoulements subsoniques où la vitesse est toujours considérablement inférieure à celle du son dans le même fluide. Dans ce cas, on a :

$$\rho = Cte, \quad \text{donc,} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{D\rho}{Dt} = 0$$

En remplaçant dans l'équation de conservation de la masse, on aura :

$$\boxed{div\ \vec{v} = 0} \tag{1.60}$$

Comme conséquence, le débit volumique est le même à travers tout tube de courant

Sur la figure 10, on a :

$$\rho S_1 v_1 = \rho S_2 v_2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{S_1 v_1 = S_2 v_2} \tag{1.61}$$

1.3.5.3 Écoulement irrotationnel

C'est un écoulement dans lequel il n'y a pas d'effets tourbillonnaires ; c'est-à-dire, lorsque les particules fluides ne subissent pas de rotation pure. On définit le vecteur tourbillon (ou vecteur vitesse de rotation) comme :

$$\vec{\Omega} = \frac{1}{2}\ \overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{v} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{\text{rot}} = 0 \tag{1.62}$$

Dans ce cas, le champ de vitesse dérive d'un potentiel scalaire $\phi(M,t)$ appelé potentiel de vitesse comme en électrostatique avec $\vec{E}(M,t)$. Le champ de vitesse est nécessairement un gradient ; c'est-à-dire, $\exists\phi$ tel

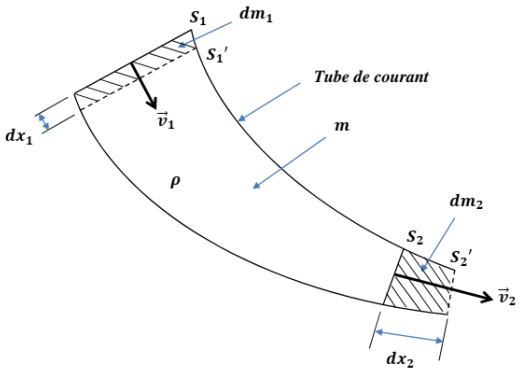


FIG. 10: Tube de courant

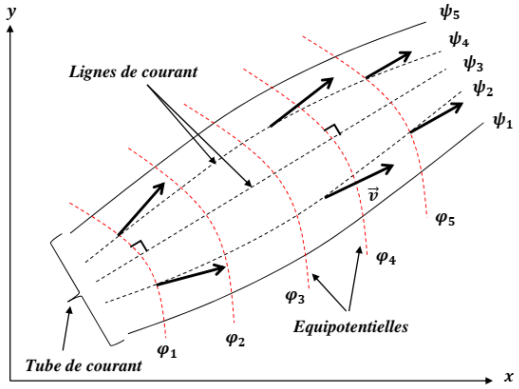


FIG. 11: Représentation des lignes de courant et des lignes équipotentielles

que :

$$\vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}}\ \phi = \vec{\nabla}\phi \tag{1.63}$$

traduit par :

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ v_y &= \frac{\partial \phi}{\partial y} \\ v_z &= \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{aligned} \tag{1.64}$$

Où $\phi(M,t)$ désigne la fonction potentielle ou le potentiel de vitesse. L'écoulement est appelé aussi écoulement potentiel. Donc, la connaissance de la fonction potentielle ϕ permet d'en déduire le champ des vecteurs vitesse en tout point de l'écoulement. Il en résulte que le vecteur vitesse est en tout point perpendiculaire à la surface équipotentielle en ce point et que les lignes de courant sont orthogonales aux surfaces équipotentielles qu'elles traversent.

1.3.5.4 Écoulement incompressible et irrotationnel

$$div\ \ \vec{v} = div\ (\overrightarrow{\text{grad}}\ \phi) = 0\ \Rightarrow\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\right) = 0 \tag{1.65}$$

qui implique :

$$\boxed{\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0\ \Rightarrow\ \ \Delta\ \phi = 0} \tag{1.66}$$

Cette équation est appelée equation de Laplace. (Le potentiel des vitesses vérifie l'équation de Laplace vue en électrostatique pour le potentiel électrique).

1.3.5.5 Fonction de courant

Dans un écoulement irrotationnel, chaque ligne de courant peut être représentée par une fonction ψ appelée fonction de courant cette fonction est définie à partir des composantes de la vitesse tel que (pour un écoulement bidimensionnel) :

$$\vec{v} = \begin{cases} v_x = \dfrac{\partial \psi}{\partial y} = \dfrac{\partial \phi}{\partial x} \\ v_y = -\dfrac{\partial \psi}{\partial x} = \dfrac{\partial \phi}{\partial y} \end{cases} \tag{1.67}$$

Donc, la connaissance de la fonction de courant ψ permet d'en déduire le champ des vecteurs vitesse en tout point de l'écoulement.

La fonction de courant permet de vérifier l'équation de continuité :
Pour un écoulement bidimensionnel on a vu que l'équation de continuité peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \tag{1.68}$$

En remplaçant v_x et v_y par leurs expressions, on obtient :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} = 0 \tag{1.69}$$

La fonction de courant est une fonction harmonique :
Pour un écoulement irrotationnel on a :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{v} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 \tag{1.70}$$

La fonction de courant est constante sur une ligne de courant :
on a vu qu'une ligne de courant est définie par l'équation :

$$v_x \cdot dy - v_y \cdot dx = 0 \tag{1.71}$$

En remplaçant v_x et v_y par leurs expressions en ψ ci-dessus, On obtient :

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = 0 \quad \Rightarrow \quad d\psi = 0 \tag{1.72}$$

ce qui implique que $\psi = Cte$ sur une ligne de courant.

Les lignes de courant sont orthogonales aux équipotentielles
pour un écoulement irrotatiannel ϕ et ψ sont des fonctions des coordonnées du point considéré et sont orthogonales (figure 11). La direction de la tangente à la ligne de courant en un point est donnée par le vecteur (v_x, v_y) et celle de l,équipotentielle au même point est donnée par le vecteur $(v_y, -v_x)$

1.3.5.6 Débit volumique entre deux lignes de courant

Évaluons le débit qui passe par l'arc AB reliant 2 lignes de courant de fonctions ψ_1 et ψ_2 (figure 12). On définit les 2 vecteurs $\vec{dS}(dx, dy)$ et $\vec{n}\left(\frac{dy}{ds}, -\frac{dx}{ds}\right)$.

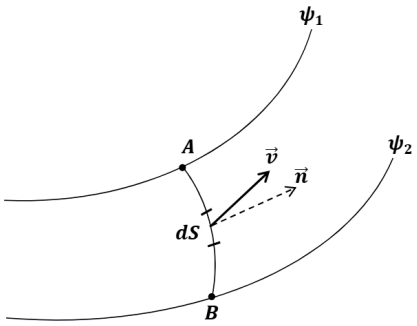


FIG. 12: Débit volumique entre de lignes de courant

Le débit volumique Q_v entre A et B est égal au flux du vecteur vitesse a travers AB :

$$Q_v = \int_A^B \vec{v}(M) \cdot \vec{n} \cdot dS = \int_A^B \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \left(\frac{dy}{dS} \right) + \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \left(\frac{dx}{dS} \right) \right] dS \tag{1.73}$$

qui donne :

$$\boxed{Q_v = \int_A^B d\psi = \psi_2 - \psi_1} \tag{1.74}$$

Donc, le débit volumique entre 2 lignes de courant est constant et est égal à la différence entre les valeurs de leurs fonctions de courant. c'est un débit par unité de longueur (en m^2/s)

1.3.5.7 Potentiel complexe

On appelle potentiel complexe la fonction :

$$f(z) = \phi + i\psi \tag{1.75}$$

avec :

ϕ : fonction potentielle
ψ : fonction de courant
$i^2 = -1$

$f(z)$ possède une dérivée unique en un point quelconque $M(x, y)$

$$\frac{df}{dz} = v_x - iv_y \tag{1.76}$$

Puisque :

$$\begin{aligned} \frac{df}{dz} &= \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial x} + i\frac{\partial \psi}{\partial x} = v_x - iv_y \\ \frac{df}{dz} &= \frac{\partial f}{i\partial y} = \frac{1}{i}\left(\frac{\partial \phi}{\partial y} + i\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) = v_x - iv_y \end{aligned} \tag{1.77}$$

$\frac{df}{dz} = v_x - iv_y$ est une vitesse complexe $\vec{v'}$ appelée vitesse conjuguée de $\vec{v}$

1.3.6 Théorème de Bernoulli

Dans le cas de l'écoulement d'un fluide parfait dans une canalisation fixe par rapport au sol (repère absolu), c'est à dire pas d'accélération d'entrainement $a_e = 0$. Reprenons l'équation d'équilibre (1.36) et ajoutons les forces d'inertie bien évidemment qui sont dues au mouvement du fluide par rapport la canalisation.

$$\sum d\vec{F} = d\vec{F}_s - dW \cdot \vec{k} - \cancelto{0}{dm\,\vec{a_e}} = dm \cdot \vec{a} \tag{1.78}$$

$$-\left(\frac{\partial p}{\partial x}\cdot\vec{i}+\frac{\partial p}{\partial y}\cdot\vec{j}+\frac{\partial p}{\partial z}\cdot\vec{k}\right)dxdydz-\rho g\cdot dxdydz\cdot\vec{k}=\rho\cdot dxdydz\frac{d\vec{v}}{dt} \tag{1.79}$$

divisons par $dxdydz$, on trouve :

$$-\left(\frac{\partial p}{\partial x}\cdot\vec{i}+\frac{\partial p}{\partial y}\cdot\vec{j}+\frac{\partial p}{\partial z}\cdot\vec{k}\right)-\rho g\cdot\vec{k}=\rho\cdot\frac{d\vec{v}}{dt} \tag{1.80}$$

$$\frac{dv_x}{dt}\cdot\vec{i}+\frac{dv_y}{dt}\cdot\vec{j}+\frac{dv_z}{dt}\cdot\vec{k}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}\cdot\vec{i}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}\cdot\vec{j}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}\cdot\vec{k}-g\cdot\vec{k} \tag{1.81}$$

On trouve :

$$\begin{aligned}\frac{dv_x}{dt}&=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}\\ \frac{dv_y}{dt}&=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}\\ \frac{dv_z}{dt}&=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}-g\end{aligned} \tag{1.82}$$

Multiplions la première equation par dx, la deuxième par dy et la troisième par dz, on trouve :

$$\begin{aligned}\frac{dv_x}{dt}dx&=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}dx\\ \frac{dv_y}{dt}dy&=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}dy\\ \frac{dv_z}{dt}dz&=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}dz-gdz\end{aligned} \tag{1.83}$$

Le système devient :

$$\begin{aligned}v_xdv_x&=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}dx\\ v_ydv_y&=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}dy\\ v_zdv_z&=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}dz-gdz\end{aligned} \tag{1.84}$$

Qu'on peut mettre sous la forme

$$\begin{aligned}d\left(\frac{v_x^2}{2}\right)&=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}dx\\ d\left(\frac{v_y^2}{2}\right)&=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}dy\\ d\left(\frac{v_z^2}{2}\right)&=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}dz-gdz\end{aligned} \tag{1.85}$$

faisons maintenant la somme de ces trois équations :

$$d\left(\frac{v_x^2}{2}\right)+d\left(\frac{v_y^2}{2}\right)+d\left(\frac{v_z^2}{2}\right)=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}dx-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}dy-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}dz-gdz \tag{1.86}$$

qui devient :

$$d\left(\frac{v_x^2}{2}+\frac{v_y^2}{2}+\frac{v_z^2}{2}\right)=-\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial x}dx+\frac{\partial p}{\partial y}dy+\frac{\partial p}{\partial z}dz\right)-gdz \tag{1.87}$$

qui implique :

$$d\left(\frac{v^2}{2}\right)=-\frac{1}{\rho}dp-d(gz) \tag{1.88}$$

Multiplions par ρ :

$$d\left(\rho\frac{v^2}{2}\right) = -dp - d(\rho g z) \tag{1.89}$$

qui mène à :

$$d\left(\rho\frac{v^2}{2}\right) + dp + d(\rho g z) = 0 \tag{1.90}$$

$$d\left(p + \rho g z + \frac{1}{2}\rho v^2\right) = 0 \tag{1.91}$$

On trouve finalement ***l'équation de Bernoulli*** pour un fluide parfait :

$$\boxed{p + \rho g z + \frac{1}{2}\rho v^2 = Cte} \tag{1.92}$$

1.3.7 Théorème de Bernoulli avec échange de travail

On suppose qu'une machine hydraulique est placée entre les sections S_1 et S_2 (voir Fig.13). Cette machine est caractérisée par une puissance nette P_{net} échangée avec le fluide, une puissance sur l'arbre P_a et un certain rendement η. Cette machine peut être soit une turbine soit une pompe.

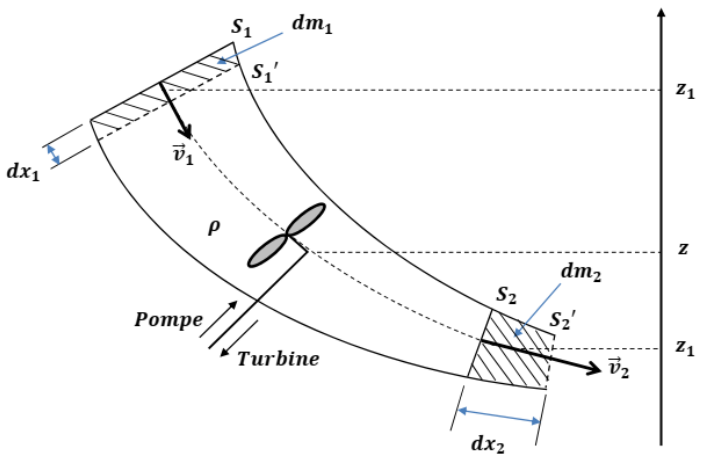


FIG. 13: Une machine placée dans un écoulement

Dans le cas d'une pompe, le rendement est donné par l'expression suivante

$$\boxed{\eta = \frac{P_{net}}{P_a}} \tag{1.93}$$

Dans le cas d'une turbine, le rendement est donné par l'expression suivante

$$\boxed{\eta = \frac{P_a}{P_{net}}} \tag{1.94}$$

On applique le théorème de l'énergie mécanique au fluide entre t et t' : "La variation de l'énergie mécanique est égale à la somme des travaux des forces extérieurs". En considérant cette fois ci le travail de la machine hydraulique. On aboutit finalement à l'équation de Bernoulli suivante :

$$\boxed{\frac{v_2^2 - v_1^2}{2} + \frac{p_2 - p_1}{\rho} + g(z_2 - z_1) = \frac{P_{net}}{q_m}} \tag{1.95}$$

1.4 Exercices

Exercice 1

On considère l'écoulement défini en variables de Lagrange par

$$x = a + \alpha t \tag{1.96}$$
$$y = b + \beta t \tag{1.97}$$
$$z = c + c\alpha t + \gamma t^3 \tag{1.98}$$

Donner la vitesse $\vec{U}$ de cet écoulement en variables d'Euler.

Exercice 2

On considère l'écoulement défini en variables d'Euler par

$$u = \omega x \tag{1.99}$$
$$v = \omega y \tag{1.100}$$
$$w = -\omega x + \alpha t \tag{1.101}$$

où ω est non nul

1 Cet écoulement est-il stationnaire, incompressible ?

2 Déterminer les trajectoires

3 Déterminer les lignes de courant à l'instant t_1

Exercice 3

On considère l'écoulement défini en variables d'Euler par

$$u = \omega^2 yt \tag{1.102}$$
$$v = \omega^2 xt \tag{1.103}$$
$$w = \omega z \tag{1.104}$$

où ω est non nul

1 Cet écoulement est-il stationnaire, incompressible, irrotationnel ?

2 Existe-il un potentiel des vitesses ? si oui, le déterminer.

Exercice 4

Un fluide parfait incompressible s'écoule avec un débit volumique $q_v = 0.4\ l/s$ à travers un orifice circulaire de diamètre d, situé sur le coté d'un réservoir de diamètre $D \gg d$. Le diamètre de l'orifice est $d = 10\ mm$.

1 Déterminer la vitesse de l'écoulement au niveau de l'orifice

2 Énoncer le théorème de Bernoulli en termes de hauteur

3 A quelle distance de la surface libre se trouve l'orifice ?

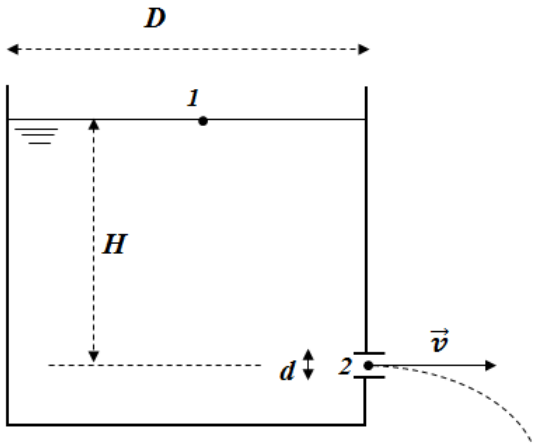


FIG. 14: Écoulement d'un fluide à travers un orifice

Exercice 5

Un pompe P alimente un château d'eau à partir d'un puits (voir figure 15) à travers une conduite de diamètre $d = 150\ mm$.

On donne : $z_1 = -5\ m$ et $z_2 = 26\ m$, $p_1 = p_2 = 1.013\ bar$, $v = 0.4\ m/s$, $g = 9.81\ m/s^2$. On négligera

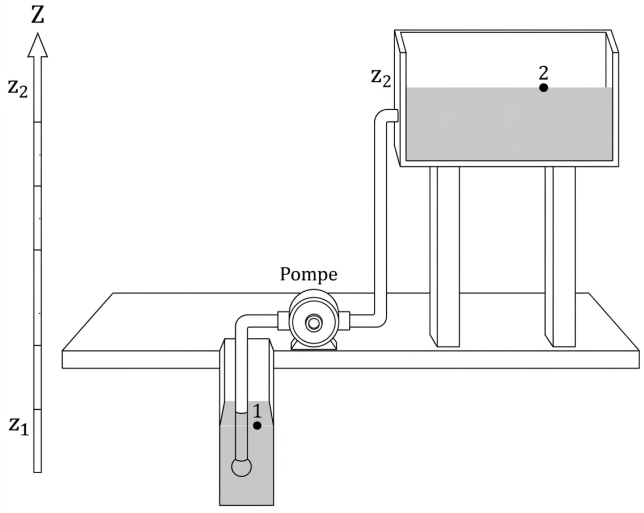


FIG. 15: Alimentation d'un château d'eau

toutes les pertes de charge.

1 Calculer le débit volumique Q_v de la pompe en l/s.

2 Écrire l'équation de Bernoulli entre les surfaces 1 et 2.

3 Calculer la puissance utile P_u de la pompe.

4 Déduire la puissance P_a absorbée par la pompe sachant que son rendement est de 80%

Chapitre 2

Équations générales des fluides réels

La description mathématique du comportement des fluides réels repose sur un ensemble de principes fondamentaux issus de la mécanique des milieux continus. Ce chapitre a pour objectif d'établir, de manière rigoureuse, les équations qui gouvernent le mouvement d'un fluide visqueux, en partant des outils mathématiques nécessaires jusqu'aux équations de conservation. Nous commençons par rappeler les principaux théorèmes intégraux — divergence, Ostrogradsky, Green et Stokes — qui constituent le socle analytique permettant de relier les grandeurs locales aux grandeurs globales, et de passer d'une formulation volumique à une formulation surfacique. Nous introduisons ensuite la notion de tenseur des contraintes, en distinguant la contribution isotrope de pression et la contribution anisotrope visqueuse, avant de spécialiser l'analyse aux fluides newtoniens pour lesquels le tenseur des contraintes de cisaillement est linéaire en taux de déformation. L'application du principe fondamental de la dynamique à un volume fluide conduit alors à l'équation de mouvement générale, dont l'équation de Navier-Stokes est le cas particulier des fluides incompressibles newtoniens. Nous abordons enfin les bilans d'énergie cinétique, les théorèmes de Kelvin et de Bernoulli généralisé, ainsi que les notions pratiques de pertes de charge et de pompage, indispensables à l'ingénieur.

2.1 Théorèmes intégraux

Soit Ω un domaine fluide borné de frontière $\partial\Omega$. On désigne par dV un élément de volume infinitésimal centré en un point $M \in \Omega$, et par dS un élément de surface de $\partial\Omega$ centré en un point P, auquel on associe la normale extérieure unitaire $\vec{n}$ — voir figure 1. Les théorèmes présentés dans cette section établissent des relations fondamentales entre les intégrales de volume sur Ω et les intégrales de surface sur $\partial\Omega$. Ils jouent un rôle central en mécanique des fluides, notamment pour passer d'une formulation locale (en un point) à une formulation intégrale (sur un volume de contrôle), et vice versa.

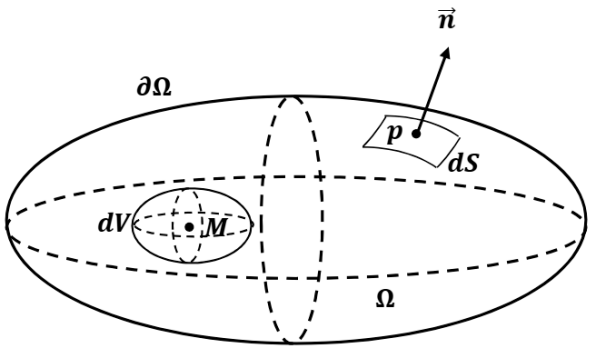


FIG. 1: Domaine fluide Ω et sa frontière $\partial\Omega$.

2.1.1 Théorème de la divergence (forme indicielle)

Soit $F_{ijk}(M,t)$ un champ tensoriel suffisamment régulier sur Ω. Le théorème de la divergence en notation indicielle s'écrit :

$$\iiint_{\Omega} F_{ijk,k}\, dV = \iint_{\partial\Omega} F_{ijk}\, n_k\, dS \tag{2.1}$$

où l'indice répété k indique une sommation (convention d'Einstein), et $F_{ijk,k}$ désigne la dérivée partielle de F_{ijk} par rapport à x_k. Ce résultat relie ainsi la somme des dérivées dans le volume à un flux à travers la frontière.

2.1.2 Théorème d'Ostrogradsky

C'est la forme vectorielle du théorème de la divergence. Pour un champ vectoriel $\mathbf{F}$ régulier sur Ω :

$$\iiint_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{F}\, dV = \iint_{\partial\Omega} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, dS \tag{2.2}$$

Ce théorème exprime que la divergence totale d'un champ dans un volume est égale au flux net de ce champ à travers la surface fermée qui le délimite.

2.1.3 Théorèmes de Green

Ces relations sont des généralisations du théorème d'Ostrogradsky à différentes opérations différentielles. Pour un champ scalaire f et un champ vectoriel $\mathbf{F}$:

$$\iiint_{\Omega} \mathbf{grad}\, f\, dV = \iint_{\partial\Omega} f\, \mathbf{n}\, dS \tag{2.3}$$

$$\iiint_{\Omega} \mathbf{rot}\, \mathbf{F}\, dV = \iint_{\partial\Omega} \mathbf{n}\times\mathbf{F}\, dS \tag{2.4}$$

Pour un champ tensoriel d'ordre deux $\underline{\underline{\mathbf{F}}}$:

$$\iiint_{\Omega} \operatorname{div} \underline{\underline{\mathbf{F}}}\, dV = \iint_{\partial\Omega} \underline{\underline{\mathbf{F}}}\cdot\mathbf{n}\, dS \tag{2.5}$$

2.1.4 Théorème de Stokes

Ce théorème relie la circulation d'un champ vectoriel $\mathbf{F}$ le long d'une courbe fermée C au flux de son rotationnel à travers toute surface S s'appuyant sur C :

$$\oint_{C} \mathbf{F}(M,t)\cdot d\mathbf{M} = \iint_{S} \mathbf{rot}\, \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, dS \tag{2.6}$$

2.1.5 Théorème de l'intégrale nulle

Ce théorème, simple mais d'une grande portée en mécanique des fluides, affirme que si l'intégrale d'une fonction $f(M,t)$ est nulle sur tout sous-domaine ω de Ω, alors la fonction est identiquement nulle en tout point :

$$\iiint_{\omega} f(M,t)\, dV = 0 \quad \forall\, \omega \subset \Omega \quad \Longleftrightarrow \quad f(M,t) = 0 \quad \forall\, M \in \Omega \tag{2.7}$$

Ce résultat est notamment utilisé pour localiser les équations de bilan : une égalité entre intégrales valable pour tout volume de contrôle implique une égalité ponctuelle entre les intégrandes.

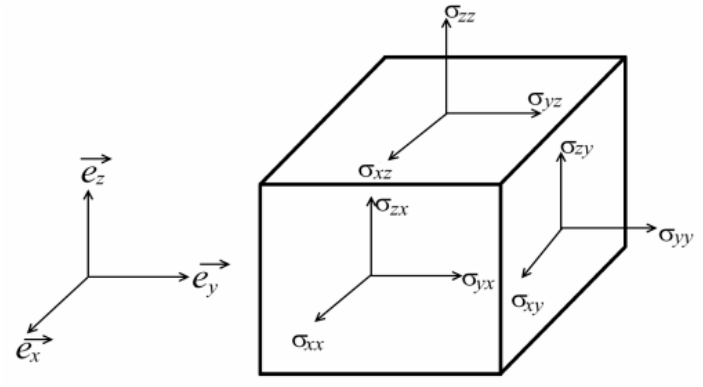


FIG. 2: Représentation des contraintes appliquées sur un élément de volume

2.2 Contraintes au sein d'un fluides réel

Considérons un petit élément de volume $dV = dxdydz$ soumis à des forces de volume (pesanteur, inertie) appliquées au centre de gravité de l'élément, et à des forces de surface issues de l'action des milieux extérieurs sur l'élément considéré. Les contraintes correspondantes sur les faces définissent un tableau à 9 composantes qui constituent un tenseur d'ordre 2. Ce tenseur est symétrique si

$$\begin{aligned} \sigma_{xy} &= \sigma_{yx} \\ \sigma_{xz} &= \sigma_{zx} \\ \sigma_{yz} &= \sigma_{zy} \end{aligned} \tag{2.8}$$

Le tenseur de contraintes s'écrit comme suit

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \begin{matrix} \ldots & \perp & Ox \\ \ldots & \perp & Oy \\ \ldots & \perp & Oz \end{matrix} \tag{2.9}$$

i : par rapport la surface perpendiculaire à l'axe.
j : par rapport à l'axe considéré.
Dans le cas d'un cisaillement simple entre deux plans, les seules composantes non nulles sont $\sigma_{xy} = \sigma_{yx} = \sigma$, ce qui implique

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & \sigma & 0 \\ \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.10}$$

Dans le cas d'une traction simple, la seule composante non nulle est $\sigma_{xx} = \sigma$, qui mène à

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.11}$$

Ce tenseur de contraintes peut être décomposé en une partie isotrope (pression) et une partie anisotrope (contraintes de cisaillement) comme suit :

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij} \tag{2.12}$$

où

$$p = \frac{1}{3}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})$$

δ_{ij} : Symbol de kronecker

Le premier tenseur isotrope est responsable des modifications de volume. Le second tenseur anisotrope est responsable des déformations.

Remarque

a- Le fait d'avoir écrit le tenseur $\boldsymbol{\sigma}$ sous la forme précédente (relation (2.12)) n'entraine pas que le tenseur des contraintes $\boldsymbol{\tau}$ ne comporte aucun terme diagonal ; de fait, il apparait en général des contraintes normales lors du mouvement relatif de différentes parties du fluide. Dans les fluides élastiques, les contraintes normales dépendent de la direction ; par exemple, pour un champ de vitesse de cisaillement, $v_x(y)$, des différences entre les contraintes normales τ_{xx} et τ_{yy} apparaissent.

b- Le terme de pression utilisé pour designer le paramètre p de la relation (2.12) doit être compris dans le sens de contribution à la pression mécanique, définie à partir des contraintes mécaniques exercées sur un élément de fluide. On ne peut pas définir la pression dans un fluide en mouvement à partir de considérations thermodynamiques, car le système n'est pas en équilibre thermodynamique à chaque instant.

2.2.1 Caractéristique de tenseur τ_{ij}

Ces contraintes s'annulent quand un élément du fluide se déplace sans se déformer, et ne dépendent, de ce fait, ni de la vitesse (translation globale), ni de la rotation locale. Cette dernière est déterminée par le tenseur antisymétrique d'élément général :

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) \tag{2.13}$$

Les composantes ω_{ij} sont reliées au pseudo-vecteur vorticité $\boldsymbol{\omega} = \textbf{rot}\ \boldsymbol{v}$; les composantes τ_{ij} du tenseur des contraintes de cisaillement, qui est lui-même symétrique, doivent donc dépendre uniquement des composantes e_{ij} de la partie symétrique du tenseur des gradients de vitesse, avec :

$$\dot{\gamma}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) \tag{2.14}$$

Les remarques précédentes nous permettent déjà de dire que,dans le cas général, les composantes du tenseur τ_{ij} ne dépendent que de celles du tenseur $\dot{\gamma}_{ij}$.

2.2.2 Tenseur des contraintes de cisaillement pour un fluide newtonien

Dans la suite de ce cours, nous étudierons presque exclusivement les fluides qualifies de newtoniens. Ce sont les fluides pour lesquels on suppose que les composantes τ_{ij} du tenseur des contraintes de cisaillement dépendent linéairement des valeurs instantanées des déformations. Lorsqu'on suppose, de plus, que le milieu est isotrope, cela se traduit par :

$$\tau_{ij} = 2\alpha\dot{\gamma}_{ij} + \beta\ \delta_{ij}\dot{\gamma}_{mm} \tag{2.15}$$

où α et β sont des constantes réelles caractéristiques du fluide considéré.
Au premier ordre, les composantes du tenseur τ_{ij} dépendent linéairement des composantes de vitesse de déformation $\dot{\gamma}_{ij}$: ces composantes doivent en effet changer de sens quand on inverse celui de la déformation.

τ_{ij} s'écrit donc :

$$\tau_{ij} = \alpha_{ijkl}\ \dot{\gamma}_{kl} \tag{2.16}$$

ou A_{ijkl} représente un tenseur d'ordre quatre pour un milieu isotrope, dont on peut montrer que la forme générale est :

$$A_{ijkl} = \alpha\ \delta_{ik}\delta_{jl} + \alpha'\ \delta_{il}\delta_{jk} + \beta\ \delta_{ij}\delta_{kl} \tag{2.17}$$

Le tenseur τ_{ij} étant symétrique ($\tau_{ij} = \tau_{ji}$), α_{ijkl} doit être symétrique en i et j, ce qui impose $\alpha = \alpha'$; on a donc :

$$\tau_{ij} = \alpha(\delta_{ik}\delta_{jl}\dot{\gamma}_{kl} + \delta_{il}\delta_{jk}\dot{\gamma}_{kl}) + \beta\ \delta_{ij}\delta_{kl}\dot{\gamma}_{kl} = \alpha(\dot{\gamma}_{ij} + \dot{\gamma}_{ji}) + \beta\ \delta_{ij}\dot{\gamma}_{ll} \tag{2.18}$$

Soit :

$$\tau_{ij} = 2\alpha\ \dot{\gamma}_{ij} + \beta\ \delta_{ij}\dot{\gamma}_{ll} \tag{2.19}$$

Nous utiliserons la relation (2.15) sous la forme équivalente :

$$\tau_{ij} = \eta\left(2\dot{\gamma}_{ij} + \frac{2}{3}\delta_{ij}\dot{\gamma}_{mm}\right) + \xi\ \delta_{ij}\dot{\gamma}_{mm} \tag{2.20}$$

qui utilise la décomposition du tenseur des déformations. Le premier terme correspond à une déformation sans changement de volume, le second correspond a une dilatation isotrope ; il est nul pour un fluide incompressible.
η est le coefficient de viscosité de cisaillement et ξ est appelé deuxième viscosité ou viscosité de volume ; les contraintes correspondantes sont associées aux variations de volume du fluide par compression. Ce terme n'apparait pas dans l'étude des fluides incompressibles, car div $\boldsymbol{v}$ est nul. Dans ce cas, la relation (2.20) prend la forme simplifiée :

$$\boxed{\tau_{ij} = 2\eta\ \dot{\gamma}_{ij}} \tag{2.21}$$

2.3 Théorème de la quantité de mouvement

Nous appliquons la relation fondamentale de la dynamique à un volume de fluide Ω en écrivant l'égalité entre la variation temporelle de sa quantité de mouvement et l'ensemble des forces (de volume et de surface) exercées sur Ω. Le volume Ω est constitué d'éléments matériels dont il suit les déplacements.

$$\frac{d}{dt}\left[\iiint_\Omega \rho\ \boldsymbol{v}\ dV\right] = \iiint_\Omega \rho\ \mathbf{f}\ dV + \iint_{\partial\Omega} \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n}\ dS \tag{2.22}$$

Dans cette relation, dV représente le volume d'un élément matériel de fluide et dS est un élément de la surface fermée $\partial\Omega$ limitant le volume Ω. Le tenseur $\boldsymbol{\sigma}$ prend en compte l'ensemble des forces de surface (pression et viscosité) s'exerçant sur l'élément dS. La force en volume par unité de masse $\mathbf{f}$ appliquée à l'unité de masse du fluide est, par exemple, la pesanteur ou la force électrostatique sur un fluide chargé.

La dérivée lagrangienne (d/dt) est calculée dans un référentiel qui suit le mouvement du fluide. Dans ce référentiel, le produit $\rho\ dV$, qui représente la masse d'un élément matériel de fluide, est une constante : en effet, tout élément de fluide contient, par définition, toujours les mêmes molécules qui suivent le champ de vitesse local de l'écoulement. Ce résultat essentiel nous permet d'appliquer la dérivation temporelle uniquement au facteur $\boldsymbol{v}$ dans le premier terme de l'équation (2.22) et d'écrire :

$$\frac{d}{dt}\left[\iiint_\Omega \rho\ \boldsymbol{v}\ dV\right] = \iiint_\Omega \rho\ \frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\ dV \tag{2.23}$$

En toute rigueur, un calcul complet du bilan des variations de quantité de mouvement dans le volume Ω serait nécessaire, mais le raisonnement simplifié ci-dessus contient l'essentiel de la physique du problème.

Par ailleurs, la composante totale de la force de surface dans la direction i peut s'écrire :

$$\iint_{\partial\Omega} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}\ dS = \iint_{\partial\Omega} \sigma_{ij}\ n_j\ dS \tag{2.24}$$

Elle représente donc le flux du vecteur de composantes (σ_{ix}, σ_{iy}, σ_{iz}) à travers la surface $\partial\Omega$. La relation (2.24) peut se transformer en intégrale de volume à l'aide du théorème d'Ostrogradsky :

$$\iint_{\partial\Omega} \sigma_{ij}\ n_j\ dS = \iiint_{\Omega} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}\ dV \tag{2.25}$$

L'équation (2.22) peut donc être mise sous la forme :

$$\iiint_{\Omega} \rho\ \frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\ dV = \iiint_{\Omega} \rho\ \mathbf{f}\ dV + \iiint_{\Omega} \mathbf{div}\ \boldsymbol{\sigma}\ dV \tag{2.26}$$

L'expression **div** $\boldsymbol{\sigma}$ représente ici le vecteur de composantes $\partial\sigma_{ij}/\partial x_j$. Rappelons que, dans l'équation (2.26), les intégrales portent sur un volume Ω qui suit le mouvement du fluide en se déformant. En faisant tendre ce volume vers zero et en divisant par l'élément de volume, on obtient l'équation locale de mouvement d'une particule de fluide :

$$\rho\ \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \rho\ \mathbf{f} + \mathbf{div}\ \boldsymbol{\sigma} \tag{2.27}$$

En toute rigueur, le volume minimal d'intégration (représentant celui d'une particule de fluide) est le volume au-dessous duquel l'hypothèse de continuité n'est plus vérifiée ; cette limite ne jouera de rôle que dans des cas très particuliers, comme celui de gaz à très faible pression.

Dans $\boldsymbol{\sigma}$, séparons maintenant la partie correspondant aux forces de pression de celle qui se rapporte aux forces de viscosité, comme dans la relation (2.12) ($\sigma_{ij} = \tau_{ij} - p\delta_{ij}$). On obtient :

$$(\mathbf{div}\ \boldsymbol{\sigma})_i = (\mathbf{div}\ \boldsymbol{\tau})_i - \frac{\partial(p\delta_{ij})}{\partial x_j} = (\mathbf{div}\ \boldsymbol{\tau})_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} \tag{2.28}$$

L'équation (2.27) devient alors :

$$\rho\ \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \rho\ \mathbf{f} - \mathbf{grad}\ p + \mathbf{div}\ \boldsymbol{\tau} \tag{2.29}$$

Cette equation est valable pour tous les fluides, car aucune hypothèse concernant la forme du tenseur des contraintes de viscosité $\boldsymbol{\tau}$ n'a encore été introduite. On écrit le plus souvent cette equation en décomposant $d\boldsymbol{v}/dt$ en $\partial\boldsymbol{v}/\partial t + (\boldsymbol{v}\ \mathbf{grad})\ \boldsymbol{v}$. Soit :

$$\rho\ \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \rho\ (\boldsymbol{v}\ \mathbf{grad})\ \boldsymbol{v} = \rho\ \mathbf{f} - \mathbf{grad}\ p + \mathbf{div}\ \boldsymbol{\tau} \tag{2.30}$$

1- Le premier terme du membre de gauche de l'équation (2.30) représente l'accélération d'une particule de fluide due a la variation explicite de sa vitesse avec le temps dans un repère eulérien fixe (accélération dans un champ homogène instationnaire $\boldsymbol{v}(r,t)$) ;

2- Le second terme correspond à la variation de vitesse associée à l'exploration du champ de vitesse par la particule de fluide au cours de son mouvement. Cette accélération sera présente même dans un champ de vitesse stationnaire $\boldsymbol{v}(r)$) ;

3- Le terme $\rho\mathbf{f}$ du membre de droite regroupe l'ensemble des forces en volume appliquées au fluide ;

4- Le second terme $-\mathbf{grad}\ p$ représente les forces de pression correspondant aux contraintes normales, qui existent même en l'absence de mouvement (pression hydrostatique). Dans le cas d'un fluide

immobile ($\boldsymbol{v} = 0$), l'équation (2.30) se réduit à :

$$\rho\ \mathbf{f} - \mathbf{grad}\ p = 0 \tag{2.31}$$

qui exprime le principe fondamental de l'hydrostatique ;

5- Enfin, le dernier terme **div** $\boldsymbol{\tau}$ représente les forces de viscosité dues a la déformation des éléments de fluide. Il contient à la fois les contraintes tangentielles, et les contraintes normales qui peuvent intervenir au cours du mouvement d'un fluide compressible ou élastique.

2.3.1 Cas d'un fluide newtonien

Reportons l'expression (2.20) du tenseur $\boldsymbol{\tau}$ dans le terme **div** $\boldsymbol{\tau}$ de l'équation (2.30) ; on obtient, pour la composante des forces de viscosité suivant la direction i :

$$(\mathbf{div}\ \boldsymbol{\tau})_i = \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} = \eta \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j} + \left(\xi + \frac{\eta}{3}\right) \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial v_l}{\partial x_l}\right) \tag{2.32}$$

Remarque

On a supposé implicitement que les variations spatiales $\partial\eta/\partial x_j$ et $\partial\xi/\partial x_j$ des coefficients de viscosité η et ξ étaient négligeables, ce qui est vérifié pour des fluides homogènes. Cela n'est pas toujours le cas, comme par exemple pour les suspensions où les variations spatiales de concentration entrainent des variations de viscosité.

L'équation (2.32) s'écrit sous la forme vectorielle :

$$\mathbf{div}\ \boldsymbol{\tau} = \eta \Delta \boldsymbol{v} + \left(\xi + \frac{\eta}{3}\right) \mathbf{grad}(\text{div}\ \boldsymbol{v}) \tag{2.33}$$

En reportant cette expression dans l'équation (2.30), on obtient, pour l'équation de mouvement d'un fluide quelconque :

$$\rho\ \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \rho\ (\boldsymbol{v}\ \mathbf{grad})\ \boldsymbol{v} = \rho\ \mathbf{f} - \mathbf{grad}\ p + \eta \Delta \boldsymbol{v} + \left(\xi + \frac{\eta}{3}\right) \mathbf{grad}(\text{div}\ \boldsymbol{v}) \tag{2.34}$$

Lorsque l'écoulement du fluide est tel qu'on peut négliger les effets de compressibilité, div $\boldsymbol{v} = 0$ et le second coefficient de viscosité ξ s'élimine. On obtient alors l'équation de Navier-Stokes que nous utiliserons largement dans la suite de ce cours :

$$\boxed{\rho\ \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \rho\ (\boldsymbol{v}\ \mathbf{grad})\ \boldsymbol{v} = \rho\ \mathbf{f} - \mathbf{grad}\ p + \eta \Delta \boldsymbol{v}} \tag{2.35}$$

2.4 Théorème du moment cinétique

2.4.1 Théorème de Kelvin : conservation de la circulation

Le théorème de Kelvin exprime que la circulation sur un contour fermé, dont chacun de ses points se déplace avec la vitesse qu'a le fluide en ce point, reste constante si les conditions suivantes sont vérifiées :

- La viscosité est nulle (Fluide Parfait)
- Les forces extérieures dérivent d'un potentiel
- La masse volumique ρ est constante

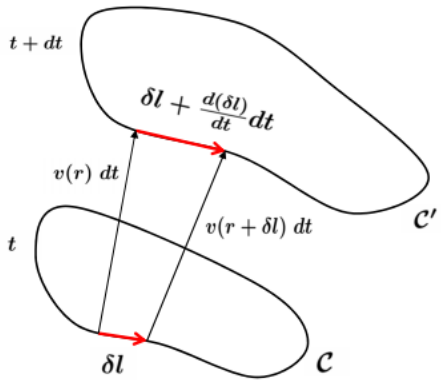


FIG. 3: Variation des éléments d'une courbe matérielle $\mathcal{C}$ suivant le mouvement d'un fluide.

Le théorème de Kelvin s'exprime par la relation :

$$\frac{d}{dt}\left[\int_{\mathcal{C}} \boldsymbol{v} \cdot \delta \boldsymbol{l}\right] = 0 \tag{2.36}$$

d/dt est une dérivée convective calculée en suivant le déplacement des particules de fluide. L'intégrale est prise sur un contour fermé $\mathcal{C}$. La courbe sur laquelle s'effectue l'intégration suit le déplacement du fluide comme indiqué sur la figure 3. La variation de la circulation est la somme de deux contributions : l'une est due à la variation temporelle de la vitesse des points du contour, et l'autre à la déformation du contour $\mathcal{C}$ pendant son déplacement. La séparation entre ces deux effets s'effectue en décomposant l'intégrale (2.36) sous la forme :

$$\frac{d}{dt}\left[\int_{\mathcal{C}} \boldsymbol{v} \cdot \delta \boldsymbol{l}\right] = \int_{\mathcal{C}} \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} \cdot \delta \boldsymbol{l} + \int_{\mathcal{C}} \boldsymbol{v} \cdot \frac{d(\delta \boldsymbol{l})}{dt} \tag{2.37}$$

La première intégrale est calculée en utilisant l'équation d'Euler, qui peut s'écrire :

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = -\mathbf{grad}\ \phi - \frac{1}{\rho}\mathbf{grad}\ p \tag{2.38}$$

Si la masse volumique ρ ne dépend que de la pression ($p = f(\rho)$), le second terme de la relation (2.38) sera également le gradient d'une fonction $g(p)$ (égale a l'intégrale $\int dp/f(p)$) ; la circulation de ces deux gradients et, par suite, du vecteur $d\boldsymbol{v}/dt$ le long de la courbe fermée $\mathcal{C}$, sera donc nulle. La seconde intégrale de l'équation (2.37) vérifie la suite d'égalités suivante :

$$\int_{\mathcal{C}} \boldsymbol{v} \cdot \frac{d(\delta \boldsymbol{l})}{dt} = \int_{\mathcal{C}} \boldsymbol{v}_i \cdot \frac{d\ \delta l_i}{dt} = \int_{\mathcal{C}} v_i \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \delta l_j\right) = \int_{\mathcal{C}} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\boldsymbol{v}^2}{2}\right) \cdot \delta l_j = \int_{\mathcal{C}} \mathbf{grad}\left(\frac{\boldsymbol{v}^2}{2}\right) \cdot \delta \boldsymbol{l} \tag{2.39}$$

En effet, la variation temporelle $d(\delta \boldsymbol{l})/dt$ de l'élément de ligne de contour de longueur $\delta \boldsymbol{l}$ est due à la différence $\delta \boldsymbol{v}$ des vitesses entre les deux points situés aux extrémités de cet élément de ligne (Fig. 3), chaque composante $d(\delta l_i)/dt$ est donc égale au produit . La combinaison de ces deux résultats démontre bien l'équation (2.36). En utilisant l'équation (2.6), le théorème de Kelvin peut être écrit sous la forme :

$$\frac{d}{dt}\left(\iint_S \mathbf{rot}\ \boldsymbol{v} \cdot \delta \boldsymbol{s}\right) = \frac{d}{dt}\left(\iint_S \boldsymbol{\omega} \cdot \delta \boldsymbol{s}\right) = 0 \tag{2.40}$$

Ainsi, le flux du vecteur vorticité , à travers une surface s'appuyant sur un contour matériel $\mathcal{C}$ qui se déplace avec le fluide (représentant la vorticité totale dans $\mathcal{C}$), reste constant pendant l'écoulement).

Ce résultat exprime la conservation du moment cinétique pour un fluide parfait, il complète ainsi notre

présentation des lois de conservation.

2.5 Théorème de l'énergie cinétique

Nous allons tout d'abord évaluer la variation au cours du temps de l'énergie cinétique de l'unité de volume d'un fluide en écoulement. Cela nous conduira, dans le cas particulier des fluides parfaits, à la relation de Bernoulli, qui constitue une des formes du bilan d'énergie. Nous discuterons enfin quelques applications de cette equation à des écoulements réels, où l'influence de la viscosité peut être cependant négligée.

Nous considérons le cas d'un fluide en écoulement incompressible. L'énergie cinétique de l'unité de volume du fluide s'écrit :

$$\mathcal{E}_C = \frac{dE_C}{dV} = \frac{1}{2}\rho v^2 \tag{2.41}$$

On peut écrire :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho v^2\right) = \rho\ \boldsymbol{v}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = \rho v_i \frac{\partial v_i}{\partial t} \tag{2.42}$$

En remplaçant le terme $\partial v_i/\partial t$ par son expression, tirée de l'équation de mouvement du fluide (Eq. (2.30)) :

$$\rho\left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \rho f_i \tag{2.43}$$

On obtient :

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho v^2\right) &= -\rho v_i v_j\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - v_i\frac{\partial p}{\partial x_i} + v_i\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \rho v_i f_i \\ &= -v_j\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{1}{2}\rho v^2\right) - v_i\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}(v_i\tau_{ij}) - \tau_{ij}\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \rho v_i f_i \\ &= (-\boldsymbol{v}\ \mathbf{grad})\left(\frac{1}{2}\rho v^2 + p\right) + \text{div}(\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{v}) - \tau_{ij}\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \rho\ \boldsymbol{v}\ \mathbf{f}\end{aligned} \tag{2.44}$$

En appliquant la relation générale : $\text{div}(\alpha\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{A}\cdot\mathbf{grad}\alpha + \alpha\ \text{div}\boldsymbol{A}$, on trouve :

$$\text{div}\left[\boldsymbol{v}\left(p + \frac{1}{2}\rho v^2\right)\right] = \left(p + \frac{1}{2}\rho v^2\right)\ \text{div}\ \boldsymbol{v} + (\boldsymbol{v}\cdot\mathbf{grad})\left(p + \frac{1}{2}\rho v^2\right) \tag{2.45}$$

En combinant la condition d'incompréhensibilité $\text{div}\ \boldsymbol{v} = 0$ avec les equations (2.44) et (2.45), on retrouve bien l'équation suivante :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho v^2\right) = -\text{div}\left[\boldsymbol{v}\left(p + \frac{1}{2}\rho v^2\right) - (\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{v})\right] + \rho\ \boldsymbol{v}\cdot\mathbf{f} - \tau_{ij}\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \tag{2.46}$$

Afin de se représenter plus aisément la signification des différents termes de l'équation locale (2.46), nous allons l'intégrer pour en donner une version globale. Choisissons un volume d'intégration V, fixe dans l'espace ; nous obtenons alors, en utilisant le théorème d'Ostrogradsky pour remplacer l'intégrale de volume de la divergence par le flux des fonctions vectorielles correspondantes :

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\left(\iiint_V \frac{1}{2}\rho v^2\ dV\right) = &-\iint_S \frac{1}{2}\rho v^2\ \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\ dS - \iint_S p\ \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\ dS + \iint_S (\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{n})\cdot\boldsymbol{v}\ dS \\ &+ \iiint_V \rho\boldsymbol{f}\ \boldsymbol{v}\ dV - \iiint_V \tau_{ij}\frac{\partial v_i}{\partial x_j}dV\end{aligned} \tag{2.47}$$

- Le premier terme du second membre de l'équation précédente représente le flux global d'énergie cinétique $\frac{1}{2}\rho v^2$ transportée par le fluide à travers la surface S.

- Le second et le troisième termes représentent le travail des forces de pression et des composantes des contraintes visqueuses exercées normalement à la surface S limitant le volume V.

- Le quatrième terme correspond a l'apport d'énergie par les forces extérieures (égales à $\rho \boldsymbol{f}$ par unité de volume). Ce terme est positif lorsque $\rho \boldsymbol{f}$ et $\boldsymbol{v}$ sont de même sens ; par exemple, ce sera le cas pour un fluide s'écoulant vers le bas, dans le champ de pesanteur terrestre ($\boldsymbol{f} = \boldsymbol{g}$), qui lui fournit de l'énergie cinétique.

  Ces quatre premiers termes représentent donc l'ensemble des échanges d'énergie d'origine convective dus aux travaux des forces exercées sur la surface S ou a ceux d'un champ de force extérieur (dans ce dernier cas, on a échange entre énergie cinétique et énergie potentielle si le champ de force extérieur dérive d'un potentiel).

- Enfin le dernier terme représente la transformation irréversible d'énergie cinétique en énergie interne du fluide sous forme de chaleur.

2.6 Théorème de Bernoulli généralisé

2.6.1 Viscosité

Nous pouvons citer quelques phénomènes observables qui illustrent comment la viscosité affecte le comportement des fluides et leur interaction avec les objets qui s'y trouvent.

Écoulement de liquides visqueux

Lorsque vous versez du miel ou du sirop d'érable, vous remarquerez que ces liquides s'écoulent lentement par rapport à l'eau. Cette résistance à l'écoulement est due à leur viscosité plus élevée.

Forme des gouttes

Si vous faites couler de l'eau et du miel à partir d'un robinet, vous observerez que l'eau forme des gouttes qui se détachent rapidement, tandis que le miel forme des gouttes qui se détachent plus lentement et sont plus étirées. Cela est dû à la viscosité plus élevée du miel, qui résiste davantage à la formation de gouttes.

Remous dans un liquide

Lorsque vous remuez une cuillère dans une tasse de café ou de thé, vous remarquerez que les tourbillons se dissipent plus rapidement dans l'eau que dans un liquide visqueux comme le miel. La viscosité du liquide influence la façon dont les tourbillons se forment et se dissipent.

Flottaison des objets

Les objets plongés dans des liquides visqueux mettent plus de temps à remonter à la surface que dans des liquides moins visqueux. Par exemple, une balle plongée dans du miel remontera plus lentement à la surface que dans de l'eau en raison de la viscosité plus élevée du miel.

Déformation d'objets

Lorsque vous pressez un objet dans un fluide visqueux, comme un ballon de baudruche plongé dans du miel, vous observerez une déformation lente de l'objet en raison de la résistance visqueuse du fluide.

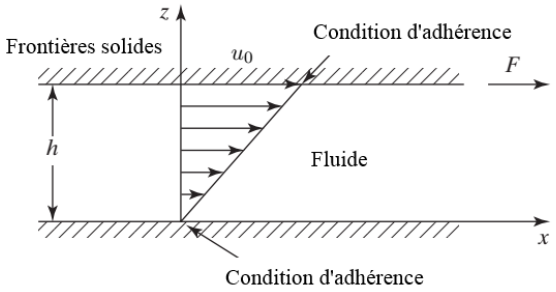


FIG. 4: Ecoulement entre deux plaques parallèles. La plaque inférieure est stationnaire tandis que la plaque supérieure se déplace à une vitesse de u_0.

2.6.1.1 Viscosité dynamique

La viscosité est une propriété très importante des fluides, particulièrement lorsqu'on discute du mouvement des fluides. En fait, le schéma de la Figure 4 est souvent utilisé pour démontrer la différence entre les solides et les fluides. Un fluide doit être en mouvement pour générer une force de cisaillement, alors qu'un solide peut supporter des forces de cisaillement dans une condition stationnaire. Dans cette figure, la plaque supérieure se déplace à une vitesse de u_0 tandis que la plaque inférieure est au repos. Un fluide est placé entre ces plaques parallèles, et lorsque la plaque supérieure est tirée, une force F est nécessaire. À ce stade, nous pouvons faire une autre observation importante. Les particules de fluide en contact immédiat avec les plaques ne se déplaceront pas par rapport aux plaques (comme si elles y étaient collées). Cela s'appelle la condition d'adhérence à la paroi, et nous l'utiliserons dans le reste de ce cours. Par conséquent, nous pouvons nous attendre à ce que les particules supérieures se déplacent à la vitesse de la plaque supérieure tandis que les particules de fluide les plus basses attachées à la plaque inférieure seront au repos. La loi de frottement de Newton stipule que :

$$\tau = \mu \cdot \frac{du}{dz} \tag{2.48}$$

τ représente la force de cisaillement par unité de surface (contrainte de cisaillement) et μ est la viscosité dynamique du fluide. Dans ce cas, la distribution de vitesse résultante est linéaire et le cisaillement sera constant à l'intérieur du fluide. Pour ce cas particulier, nous pouvons écrire :

$$\tau = \mu \cdot \frac{u_0}{h} \tag{2.49}$$

Un fluide qui se comporte ainsi est appelé un fluide newtonien, indiquant une relation linéaire entre la contrainte et la vitesse de cisaillement (ou gradient de vitesse). Comme mentionné précédemment, c'est une propriété importante des fluides car sans mouvement, il n'y a pas de force de cisaillement.

De l'équation (2.48), on obtient :

$$\mu = \frac{\tau}{\frac{du}{dz}} = \frac{\frac{N}{m^2}}{\frac{m}{s} \times \frac{1}{m}} = \frac{N \cdot s}{m^2} = \frac{N}{m^2} \cdot s = Pa \cdot s$$

En unités SI, la viscosité se mesure en $N\ s/m^2$ ou en $Pa\ s$ ou en $kg/m\ s$ et ses dimensions sont $[ML^{-1}T^{-1}]$. Couramment, la viscosité se mesure en poise ou en centipoise (cP) avec :

$$1 \text{ poise} = 0.1\ Pa\ s$$

La viscosité des fluides varie considérablement avec la température. Avec une augmentation de la température, la viscosité des liquides diminue tandis que celle des gaz augmente. Ceci peut s'expliquer par le fait que la propriété de viscosité est due aux forces intermoléculaires de cohésion et au transfert de quantité de

mouvement dû à l'échange de molécules entre les couches adjacentes du fluide sous cisaillement. Dans les liquides, en raison des molécules étroitement emballées, les forces de cohésion prédominent dans le transfert de quantité de mouvement moléculaire. Avec l'augmentation de la température, la cohésion moléculaire diminue en raison de l'augmentation de la distance entre les molécules, et par conséquent, la viscosité des liquides diminue. Dans le cas des gaz, les forces cohésives moléculaires sont très faibles et la viscosité est principalement due au transfert de quantité de mouvement moléculaire. Avec l'augmentation de la température, l'activité moléculaire augmente avec l'augmentation du transfert de quantité de mouvement, et donc également la viscosité. La relation entre la viscosité et la température pour les liquides est exprimée comme suit :

$$\mu = \frac{\mu_0}{1 + aT + bT^2} \tag{2.50}$$

Où μ représente la viscosité du liquide à $T°C$ en poise, μ_0 est la viscosité à $0°C$ en poise, et a et b sont les constantes dépendant du liquide. Pour l'eau :

$$\mu_0 = 0.0179 \text{ poise}, \quad a = 0.03368 \quad \text{et} \quad b = 0.000221$$

D'après l'équation (2.50), on peut également observer que la viscosité des liquides diminue avec l'augmentation de la température. La relation entre la viscosité et la température pour les gaz est exprimée comme suit :

$$\mu = \mu_0 + aT - bT^2 \tag{2.51}$$

Où μ représente la viscosité du gaz à $T°C$, μ_0 est la viscosité à $0°C$, et a et b sont les constantes dépendant du gaz. Pour l'air :

$$\mu_0 = 1.54 \times 10^{-5}\ Pa \cdot s, \quad a = 5.6 \times 10^{-8} \quad \text{et} \quad b = 1.189 \times 10^{-9}$$

De l'équation (2.51), il est observable que la viscosité augmente avec l'augmentation de la température. La viscosité dynamique des liquides et des gaz ne change pas de manière significative avec les valeurs de pression généralement rencontrées dans la pratique

2.6.1.2 Viscosité cinématique

La viscosité cinématique ν est le rapport de la viscosité dynamique μ sur la masse volumique du fluide ρ. Elle représente la diffusivité du quantité de mouvement et est mathématiquement exprimé comme suit :

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \tag{2.52}$$

En unités SI, la viscosité cinématique est mesurée en m^2/s et ses dimensions sont $[L^2T^{-1}]$. Communément, la viscosité cinématique est mesurée en stokes ou en centistokes.

$$1 \text{ stoke} = 10^{-4}\ m^2/s \quad \text{et} \quad 1 \text{ centistoke} = 0.01 \text{ stoke}$$

Dans le cas des liquides, la viscosité cinématique diminue avec l'augmentation de la température, tandis que dans le cas des gaz, elle augmente. La viscosité cinématique des gaz varie avec la pression en raison des changements de densité.

2.6.2 Équation de Bernoulli généralisée

Lors d'un écoulement d'un fluide réel entre les points (1) et (2) il peut y avoir des échanges d'énergie entre ce fluide et le milieu extérieur :

1- Par travail à travers une machine, pompe ou turbine ; la puissance échangée étant P.

2- Par pertes de charge dues aux frottements du fluide sur les parois ou les accidents de parcours ; la différence de pression étant Δp

Le théorème de Bernoulli s'écrit alors sous la forme générale :

$$\boxed{\frac{v_2^2 - v_1^2}{2} + \frac{p_2 - p_1}{\rho} + g(z_2 - z_1) = \sum \frac{P_{net}}{q_m} - \frac{\Delta p}{\rho}} \tag{2.53}$$

Avec :
$\sum \frac{P_{net}}{q_m}$: somme des puissances échangées entre le fluide et le milieu extérieur, à travers une machine, entre (1) et (2) :

- $P_{net} > 0$ si le fluide reçoit de l'énergie de la machine (pompe),
- $P_{net} < 0$ si le fluide fournit de l'énergie à la machine (turbine),
- $P_{net} = 0$ s'il n'y a pas de machine entre (1) et (2).

Δp : somme des pertes de charge entre (1) et (2).

2.6.3 Différents régimes d'écoulement

En 1883, Osborne Reynolds a établi un critère pour identifier l'écoulement laminaire à l'intérieur d'un tube. Il a réalisé cela en contrôlant le débit d'eau passant à travers un tube en verre, à l'aide d'un appareil similaire à celui montré dans la Fig.5.

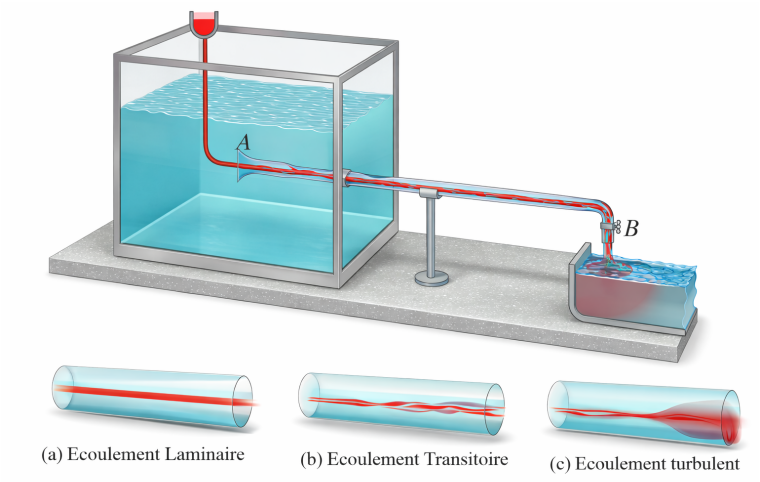


FIG. 5: Schémas de l'installation expérimentale de Reynolds

Du colorant a été injecté dans le courant en A et la vanne en B a été ouverte. Pour les faibles débits, l'écoulement dans le tube a été observé comme laminaire car la traînée de colorant est restée droite et uniforme, Fig.5.a. À mesure que le débit augmentait, en ouvrant davantage la vanne, la traînée a commencé à se désagréger en passant à un écoulement transitoire, Fig.5.b. Enfin, avec une augmentation supplémentaire du débit, la turbulence est survenue car le colorant s'est entièrement dispersé dans l'eau du tube, Fig.5.c. Des expériences utilisant d'autres liquides, ainsi que des gaz, ont montré ce même type de comportement.

Si l'expérience est menée selon un processus inverse, on peut constater que la transformation du régime d'écoulement est la suivante : de l'écoulement turbulent à l'écoulement laminaire. En l'absence de perturbation externe, la vitesse d'écoulement à laquelle l'écoulement laminaire se transforme en état transitoire est

appelée la vitesse critique supérieure, désignée par v_c' ; et celle de l'écoulement turbulent à l'état transitoire est appelée la vitesse critique inférieure, désignée par v_c comme illustré sur la Fig.6.

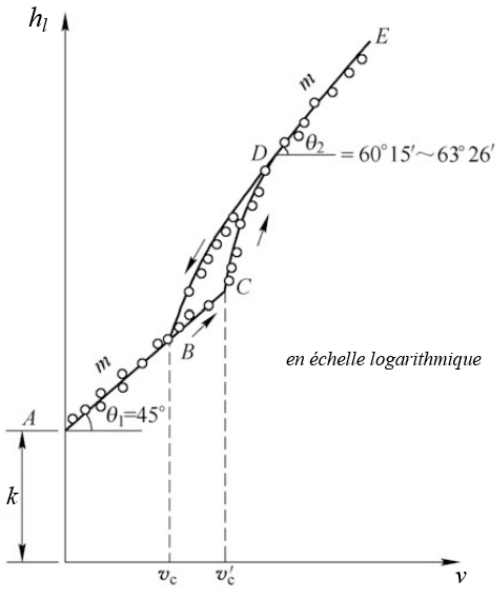


FIG. 6: Vitesse critique dans l'expérience de Reynolds

La vitesse critique supérieure est plus élevée que la vitesse critique inférieure. Dans la plupart des cas, la vitesse critique inférieure est utilisée comme critère pour juger du motif d'écoulement, et est désignée sous le nom de vitesse critique. Selon l'expérience :

- Lorsque $v > v_c'$, le fluide s'écoule en régime turbulent ;
- Lorsque $v < v_c$, le fluide s'écoule en régime laminaire ;
- Lorsque $v_c < v < v_c'$, le régime d'écoulement est transitoire

Sur la base de nombreuses expériences, Reynolds a proposé le nombre de Reynolds comme critère pour identifier le régime d'écoulement. Pour les tuyaux circulaires, le nombre de Reynolds est défini comme suit :

$$Re = \frac{\rho V D}{\mu} \tag{2.54}$$

où V est la vitesse du fluide, D est le diamètre intérieur du tuyau, ρ est la masse volumique du fluide et μ est la viscosité dynamique du fluide.
Les nombres de Reynolds correspondant à la vitesse critique supérieure et à la vitesse critique inférieure sont exprimés respectivement comme le nombre de Reynolds critique supérieur et le nombre de Reynolds critique inférieur.

$$Re_c = \frac{\rho v_c D}{\mu} \tag{2.55}$$

$$Re_c' = \frac{\rho v_c' D}{\mu} \tag{2.56}$$

Ainsi, nous pouvons utiliser les nombres de Reynolds supérieur et inférieur pour déterminer le régime d'écoulement, à savoir :

- Lorsque $Re < Re_c$, Écoulement laminaire ;

- Lorsque $Re_c < Re < Re'_c$, Écoulement transitoire ;
- Lorsque $Re > Re'_c$, Écoulement turbulent

De nombreuses expériences démontrent que le nombre de Reynolds critique inférieur Re_c est toujours égal à 2300 pour un conduit circulaire. Traditionnellement, le nombre de Reynolds critique inférieur Re_c est utilisé comme critère entre l'écoulement laminaire et turbulent, à savoir :

- Lorsque $Re < 2300$, écoulement laminaire ;
- Lorsque $Re \geq 2300$, écoulement turbulent.

Dans l'ingénierie pratique, les perturbations externes rendent très facilement le fluide turbulent, donc le nombre de Reynolds critique pratique sera plus petit que 2300, avec une valeur de :

$$Re_c = 2000$$

Lorsque le fluide s'écoule dans un tuyau non circulaire, le rayon hydraulique peut être utilisé comme longueur caractéristique, et le nombre de Reynolds critique est

$$Re_c = 500$$

Pour l'écoulement en canal ouvert, il est plus facile d'atteindre le régime turbulent en raison de l'influence externe. Souvent, le nombre de Reynolds critique utilisé dans les calculs d'ingénierie est :

$$Re_c = 300$$

2.6.4 Diamètre hydraulique

Il y a deux facteurs qui affectent l'ampleur de la résistance à l'écoulement : la surface de section S et le périmètre mouillé $\mathcal{P}$, qui est la longueur de paroi en contact avec le fluide en mouvement sur toute section transversale.

Le diamètre hydraulique D_h ou le rayon hydraulique R_h est souvent utilisé pour refléter l'influence globale sur la résistance à l'écoulement avec les deux facteurs mentionnés ci-dessus, définis séparément comme :

$$D_h = \frac{4S}{\mathcal{P}}, \quad R_h = \frac{S}{\mathcal{P}} \tag{2.57}$$

Le diamètre hydraulique sera égal au diamètre du conduit pour une section transversale circulaire. Pour un conduit circulaire avec un diamètre d et un rayon r, S équivaut à πr^2 et $\mathcal{P}$ équivaut à $2\pi r$, alors nous avons :

$$R_h = \frac{S}{\mathcal{P}} = \frac{\pi r^2}{2\pi r} = \frac{r}{2} = \frac{d}{4}, \quad \text{et} \quad D_h = \frac{4S}{\mathcal{P}} = \frac{4\pi r^2}{2\pi r} = 2r = d \tag{2.58}$$

2.7 Pertes de charge

Si les lignes de courant sont droites et parallèles les unes aux autres, alors ce type d'écoulement est appelé écoulement uniforme, sinon, il est appelé écoulement non uniforme. Dans l'écoulement de fluide, la perte de charge est la perte de pression qui se produit dans l'écoulement de tuyau ou de conduite en raison de l'effet de la viscosité du fluide. Le terme se réfère à la puissance perdue pour surmonter le frottement entre deux surfaces en mouvement. La caractéristique de la perte de charge est qu'elle est proportionnelle à la longueur du tuyau. La perte de charge par unité de poids du fluide en mouvement dans le tuyau est désignée par h_l.

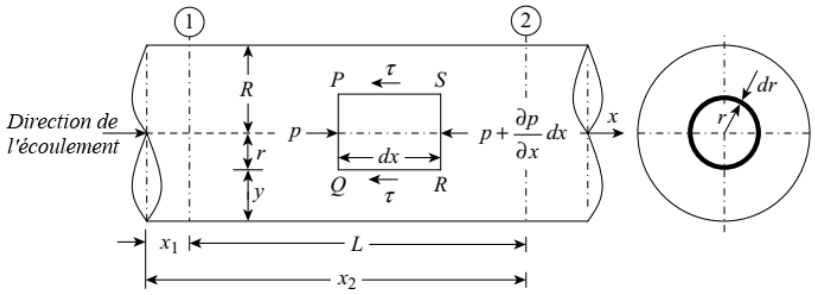


FIG. 7: Écoulement laminaire à travers un tuyau circulaire

L'écoulement dans un système de tuyauterie peut être amené à passer à travers une variété d'accessoires, coude, ou des changements brusques de section. Des pertes de charge supplémentaires sont rencontrées, principalement en raison de la séparation de l'écoulement. L'énergie est finalement dissipée par un mélange violent dans les zones séparées. Par conséquent, ces pertes seront des pertes mineures qui sont désignées par h_s. Pour l'ensemble du système de tuyauterie, sa perte de charge totale h_T devrait être la somme des pertes de charge linéaires et singulières, c'est-à-dire

$$h_T = h_l + h_s \tag{2.59}$$

2.7.1 Pertes de charge linéaires

2.7.1.1 Distribution des contraintes

La Fig.7 montre un tuyau circulaire horizontal de rayon R à travers lequel s'écoule un écoulement laminaire constant d'un fluide incompressible de gauche à droite. Considérez un petit élément de fluide cylindrique de rayon r et de longueur dx situé à une distance y de la surface interne inférieure du tuyau.

Les forces agissant sur le petit élément dans la direction de l'écoulement sont la force de pression nette et la force de cisaillement sur la surface. Si p est l'intensité de la pression sur la face PQ (extrémité gauche de l'élément), alors l'intensité de la pression sur la face RS (extrémité droite de l'élément) sera $p+(\partial p/\partial x)\,dx$. Si τ est la contrainte de cisaillement, alors la force de cisaillement sur la surface de l'élément de fluide sera $\tau \times 2\pi r dx$. Ainsi, les forces agissant sur l'élément de fluide sont les suivantes :

i Force de pression $p \times \pi r^2$ sur la face PQ

ii Force de pression $\left(p + \frac{\partial p}{\partial x}dx\right) \times \pi r^2$ sur la face RS

iii Force de cisaillement : $\tau \times 2\pi r dx$

Étant donné que l'écoulement est stable et que le tuyau est de taille uniforme, l'accélération est nulle. Par conséquent, la somme de la force de pression nette et de la force visqueuse dans la direction x doit être nulle :

$$p \times \pi r^2 - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x}dx\right) \times \pi r^2 - \tau \times 2\pi r dx = 0 \tag{2.60}$$

$$\Rightarrow\ -\frac{\partial p}{\partial x}dx \times \pi r^2 - \tau \times 2\pi r dx = 0\ \Rightarrow\ -\frac{\partial p}{\partial x}dx \times r - 2\tau = 0 \tag{2.61}$$

qui donne :

$$\tau = -\frac{\partial p}{\partial x}\frac{r}{2} \tag{2.62}$$

étant donné que :

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{p_2 - p_1}{x_2 - x_1} = \frac{p_1 - p_2}{L} = \frac{\Delta p}{L} \tag{2.63}$$

Alors :

$$\boxed{\tau = \frac{\Delta p}{L}\frac{r}{2}} \tag{2.64}$$

Dans l'équation ci-dessus, le signe négatif indique que la pression diminue dans la direction de l'écoulement. L'équation (2.64) montre que la contrainte de cisaillement τ varie linéairement le long du rayon du tuyau comme indiqué dans la Fig.8. Au centre du tuyau où $r = 0$, $\tau = 0$ et à la paroi du tuyau où $r = R$,

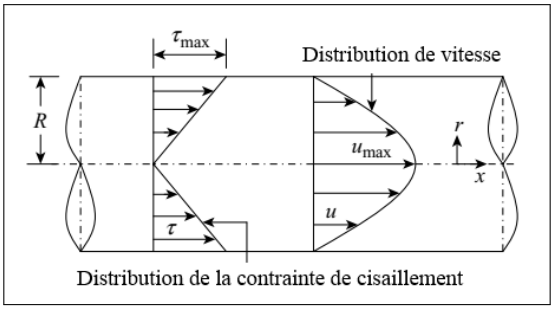


FIG. 8: Contrainte de cisaillement et distribution de la vitesse pour l'écoulement laminaire dans un tuyau

τ est maximum, et donnée par :

$$\boxed{\tau_p = \frac{\Delta p}{L}\frac{R}{2}} \tag{2.65}$$

2.7.1.2 Distribution des vitesses

De la loi de viscosité de Newton, nous obtenons :

$$\tau = \mu \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \tag{2.66}$$

Puisque : $y = R - r$, Alors : $dy = -dr$, qui donne :

$$\tau = -\mu \cdot \frac{du}{dr} \tag{2.67}$$

A partir des équations (2.64) et (2.67), on obtient :

$$\frac{\Delta p}{L}\frac{r}{2} = -\mu \cdot \frac{du}{dr} \quad \Rightarrow \quad du = -\frac{1}{2\mu}\frac{\Delta p}{L} r dr \tag{2.68}$$

Après intégration, nous obtenons :

$$u = -\frac{1}{4\mu}\frac{\Delta p}{L} r^2 + C \tag{2.69}$$

Où C est la constante d'intégration dont la valeur peut être obtenue à partir de la condition aux limites que lorsque $r = R$, $u = 0$. On obtient :

$$C = \frac{1}{4\mu}\frac{\Delta p}{L} R^2 \tag{2.70}$$

qui donne :

$$\boxed{u(r) = \frac{1}{4\mu}\frac{\Delta p}{L} R^2 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)} \tag{2.71}$$

On pose :

$$\boxed{u_{max} = \frac{\Delta p R^2}{4\mu L}} \tag{2.72}$$

et le profil de vitesse sera donné par :

$$\boxed{u(r) = u_{max}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)} \tag{2.73}$$

2.7.1.3 Débit volumique

Le débit volumique est donnée par :

$$Q_v = \iint_S u(r) \cdot dS = \int_0^R u(r) \cdot 2\pi r dr = \int_0^R \frac{\Delta p R^2}{4\mu L}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \cdot 2\pi r dr \tag{2.74}$$

qui donne :

$$Q_v = \frac{\pi R^2 \Delta p}{2\mu L}\int_0^R \left(r - \frac{r^3}{R^2}\right) dr = \frac{\pi R^2 \Delta p}{2\mu L} \cdot \left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4R^2}\right]\Bigg|_0^R = \frac{\pi R^2 \Delta p}{2\mu L} \cdot \frac{R^2}{4} \tag{2.75}$$

On trouve donc :

$$\boxed{Q_v = \frac{\pi R^4 \Delta p}{8\mu L}} \tag{2.76}$$

La vitesse moyenne est donnée par :

$$V = \frac{Q_v}{S} = \frac{1}{\pi R^2} \cdot \frac{\pi R^4 \Delta p}{8\mu L} = \frac{\Delta p R^2}{8\mu L} \tag{2.77}$$

qui donne :

$$V = \frac{u_{max}}{2} \tag{2.78}$$

Calculons maintenant la perte de charge linéaire :
de l'équation (2.77), on a :

$$\Delta p = \frac{8\mu L V}{R^2} \tag{2.79}$$

Remplaçons R par $D/2$, on trouve :

$$\Delta p = \frac{32\mu L V}{D^2} \tag{2.80}$$

Divisons les deux membre de cette equation sur ρg, on trouve :

$$\boxed{h_l = \frac{\Delta p}{\rho g} = \frac{32\mu L V}{\rho g D^2}} \tag{2.81}$$

De l'équation (2.81) On peut observer que la perte de charge due aux frottements le long du tuyau varie de manière directement proportionnelle à la vitesse d'écoulement du fluide et inversement proportionnelle au carré du diamètre du tuyau.

2.7.1.4 Coefficient de pertes de charge régulière

On définit le coefficient sans dimension, appelé coefficient de Darcy-Weisbach ou coefficient de perte de charge régulière, pour l'écoulement dans une conduite circulaire, de longueur L et de diamètre D, par :

$$\boxed{\lambda = \frac{\Delta p}{\frac{L}{D} \cdot \frac{1}{2}\rho V^2}} \quad \Rightarrow \quad \Delta p = \lambda \frac{L}{D} \cdot \frac{1}{2}\rho V^2 \tag{2.82}$$

Dans l'industrie, on utilise souvent le coefficient de frottement de Fanning. Ce coefficient est différent du celui de Darcy-Weisbach par un facteur de 4. En effet, le coefficient de frottement relie la contrainte de cisaillement pariétale τ_p à la vitesse débitante V sous la forme :

$$\tau_p = f \cdot \frac{1}{2}\rho V^2 \tag{2.83}$$

mais on sait que $\tau_p = \frac{\Delta p\ D}{4L}$, ce qui donne :

$$\frac{\Delta p\ D}{4L} = f \cdot \frac{1}{2}\rho V^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{f = \frac{\Delta p}{4\frac{L}{D} \cdot \frac{1}{2}\rho V^2}} \tag{2.84}$$

qui mène à :

$$\Delta p = 4f\frac{L}{D} \cdot \frac{1}{2}\rho V^2 \tag{2.85}$$

On peut comparer les deux coefficients par :

$$\lambda = 4f \tag{2.86}$$

Cas de l'écoulement laminaire :
Reprenons l'expression du coefficient de perte de charge λ et remplaçons l'expression de Δp (equation (2.80)) dans le cas de l'écoulement laminaire :

$$\lambda = \frac{\Delta p}{\frac{L}{D} \cdot \frac{1}{2}\rho V^2} = \frac{\frac{32\mu LV}{D^2}}{\frac{L}{D} \cdot \frac{1}{2}\rho V^2} = \frac{64}{\frac{LD\rho V^2}{\mu LV}} = \frac{64}{\frac{\rho VD}{\mu}} \tag{2.87}$$

Le coefficient de perte de charge régulière λ pour l'écoulement laminaire d'un fluide dans une conduite est indépendant de la rugosité de la paroi et sa valeur est donnée par la relation :

$$\boxed{\lambda = \frac{64}{Re}} \tag{2.88}$$

Cas de l'écoulement turbulent :
Dans un écoulement turbulent, la rugosité de la paroi exerce une influence significative sur la valeur du coefficient de perte de charge régulière. En effet, le niveau de turbulence est directement lié à l'état de la surface de la paroi solide. La rugosité relative de la paroi est définie par (ϵ/D), où ϵ représente la rugosité absolue qui dépend de la hauteur moyenne des rugosités, ainsi que de leur forme, leur nombre et leur répartition sur la surface. Une paroi est considérée comme lisse lorsque la valeur de ϵ est inférieure ou égale à la hauteur δ de la couche limite laminaire de l'écoulement. Dans le cas contraire, la paroi est qualifiée de rugueuse. Pour ce dernier cas, le coefficient de perte de charge régulière est déterminé à partir de corrélations phénoménologiques telles que la relation de Colebrook et White, valable pour $Re > 5 \times 10^5$ (Tableau.2.7.1.4).

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2\log_{10}\left(\frac{\epsilon/D}{3.71} + \frac{2.51}{Re\sqrt{\lambda}}\right) \tag{2.89}$$

Habituellement, le diagramme de Moody-Stanton est employé pour lier le coefficient de perte de charge régulière λ au nombre de Reynolds Re et à la rugosité relative ϵ/d. Cette représentation graphique est représenté sur la Fig.9 et facilite le calcul du coefficient de perte de charge régulière pour divers écoulements, qu'ils soient laminaires ou turbulents. Le Tableau 2 présente la moyenne des rugosités absolues pour les diverses surfaces de conduits couramment rencontrées dans l'industrie.

2.7.2 Pertes de charge singulières

Lorsque l'écoulement change de direction, de diamètre ou lorsqu'il rencontre des dispositifs tels que des vannes, des raccords, des coudes ou des tés le long de la conduite, des pertes de charge se produisent. Ces

Conduite			Régime d'écoulement	Relation
Lisse	Rugueuse homogène	Rugueuse hétéro-gène		
+			Laminaire ($Re < 2000$)	Poiseuille : $\lambda = \frac{64}{Re}$
+			Turbulent ($2000 < Re < 5\times10^5$)	Blasius : $\lambda = \frac{0.316}{Re^{0.25}}$
+			Turbulent ($Re > 5\times10^5$)	Karman : $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2\log_{10}\left(\frac{Re\sqrt{\lambda}}{2.51}\right)$
	+	+	Turbulent rugueux	Karman-Prandtl : $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2\log_{10}\left(\frac{\epsilon/D}{3.71}\right)$
		+	Turbulent rugueux et semi-rugueux	Colebrook : $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2\log_{10}\left(\frac{\epsilon/D}{3.71} + \frac{2.51}{Re\sqrt{\lambda}}\right)$

TAB. 1: Différentes lois de corrélation en fonction de Re et du type de rugosité

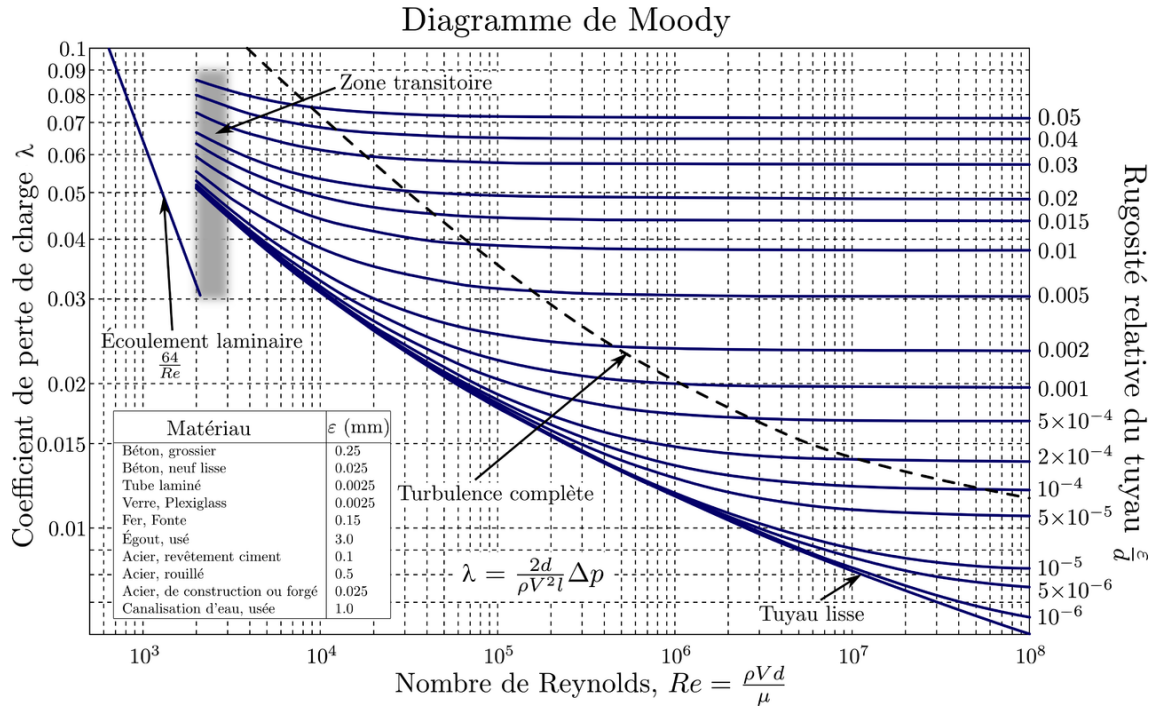


FIG. 9: Diagramme de Moody-Stanton reliant le coeffcient de perte de charge régulière λ au nombre de Reynolds Re et à la rugosité relative ϵ/d.

Matériau	État	$\epsilon\ (mm)$	Matériau	État	$\epsilon\ (mm)$
Acier	Feuille nouvelle	0.05	Cuivre	Tube étiré	0.002
	Acier inoxydable	0.002	Plastique	Tube étiré	0.0015
	Commercial	0.046	Verre	Lisse	0.0001
	Rivé	3	Caoutchouc	Lisse	0.01
	Rouillé	2	Bois	Défoncé	0.5
Fer	Fonte	0.26	Béton	Lisse	0.04
	Forgé	0.046		Rugueux	2
	Galvanisé	0.15			
	Fonte asphalté	0.12			

TAB. 2: Rugosité absolue de conduites en fonction du type et de l'état du matériau

pertes sont décrites par la relation suivante :

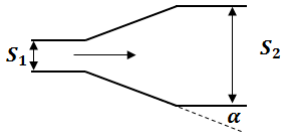
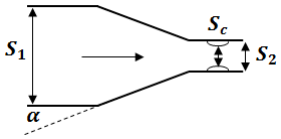
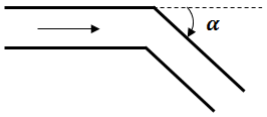
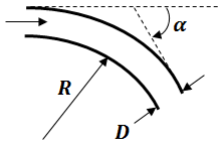
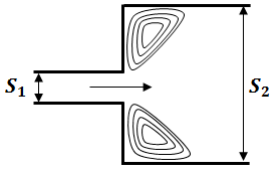
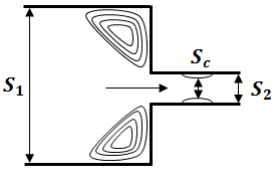
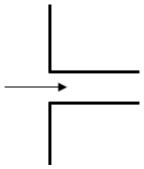
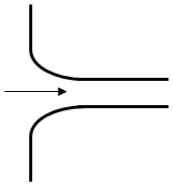
$$h_s = \sum_i K_i \frac{V_i^2}{2g} \tag{2.90}$$

où V_i est la vitesse moyenne pour le dispositif et K_i le coefficient de perte de charge pour le dispositif i défini par :

$$K_i = \frac{\Delta p_i}{\frac{1}{2}\rho V_i^2} \tag{2.91}$$

Dans le Tableau 3, nous présentons quelques valeurs de K pour divers dispositifs souvent employés. Il est observé que le coefficient de perte de charge singulière augmente davantage lorsqu'il y a des variations abruptes de la section des conduites que lors de changements progressifs.

TAB. 3: Quelques expressions du coefficient de pertes de charge singulières

Type de singularité	Schéma	Coefficient de perte de charge
Divergent		$K = \left(1 - \frac{S_1}{S_2}\right)^2 \sin\alpha$
Convergent		$K = \left(\frac{1}{\xi} - 1\right)^2 \sin\alpha$, avec $\xi = \frac{S_c}{S_2}$
Coude brusque		$K = \sin^2\alpha + 2\sin^4\frac{\alpha}{2}$
Coude progressif		$K = \frac{\pi}{\alpha}\left(0.131 + 1.847\left(\frac{D}{R}\right)^{7/2}\right)$
Élargissement brusque		$K = \left(1 - \frac{S_1}{S_2}\right)$
Rétrécissement brusque		$K = \left(\frac{1}{\xi} - 1\right)^2$
Entrée brusque		$K = 0.5$
Entrée progressive		$K = 0.04$

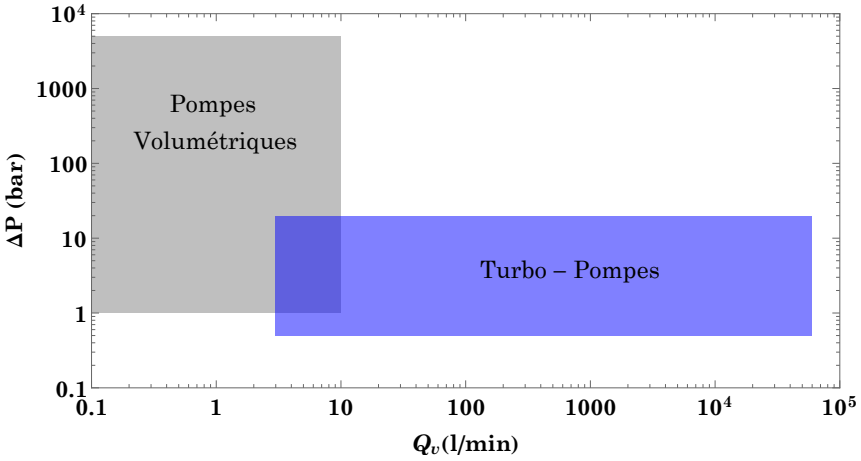
2.8 Pompes et moyens de soufflage

Les pompes sont des dispositifs conçus pour créer une différence de pression entre leurs tubulures d'entrée et de sortie. Selon les conditions d'utilisation, elles transfèrent de l'énergie au fluide, soit sous forme d'énergie potentielle en augmentant la pression en aval, soit sous forme d'énergie cinétique en induisant son mouvement.

On peut ainsi chercher à augmenter le débit, en ajoutant de l'énergie cinétique, ou/et à accroître la pression, en augmentant l'énergie potentielle, selon les caractéristiques des fluides manipulés : gazeux, liquides, visqueux ou très visqueux. Cette variété d'applications explique la grande diversité des types de pompes. On distingue principalement deux grandes catégories de pompes :

- **Pompes volumétriques :** Il s'agit notamment des pompes à piston, à diaphragme, à noyau plongeur, ainsi que des pompes rotatives comme les pompes à vis, à engrenages, à palettes ou péristaltiques. Lorsqu'elles sont utilisées pour transporter un gaz, ces pompes prennent le nom de « compresseurs ».
- **Turbo-pompes :** Toutes ces pompes sont de type rotatif, incluant les pompes centrifuges, à hélice et hélico-centrifuges.

Le diagramme ci-dessous résume les domaines d'application des deux grandes catégories de pompes :

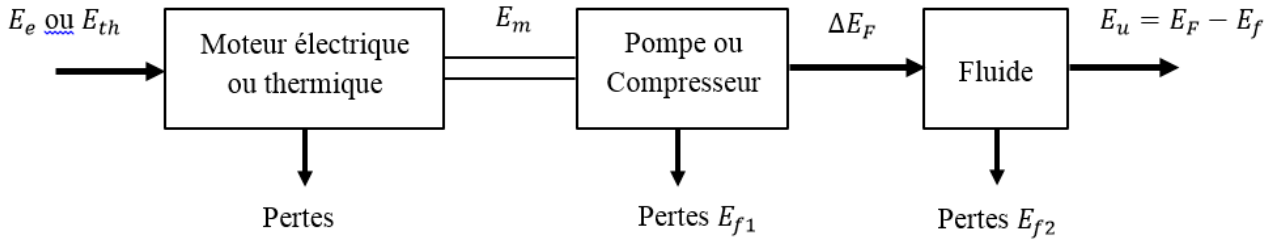


Le choix entre une pompe centrifuge et une pompe volumétrique dépend en général d'un facteur principal : la viscosité du liquide à pomper. Pour les liquides à forte viscosité, c'est la pompe volumétrique qu'il faut utiliser. Pour les autres fluides (huiles fines, eau...), la pompe centrifuge peut parfaitement faire l'affaire.

Remarque

Les machines dont la pression de sortie (ou pression aval) dépasse la pression atmosphérique sont appelées compresseurs, tandis que celles dont la pression de sortie est égale à la pression atmosphérique sont désignées comme pompes à vide. Cependant, dans tous les cas, la pression en aval reste supérieure à la pression en amont.

Le diagramme suivant illustre la chaîne énergétique d'une pompe :



De manière générale, entre 60 et 90 % de l'énergie fournie par le moteur est convertie en énergie mécanique, dont seulement 50 à 80 % seront ensuite transférés au fluide. Les pompes présentées par la suite sont principalement conçues pour les liquides. En effet, dans le cas des gaz, les phénomènes thermodynamiques, tels que la compression accompagnée d'une élévation de température, jouent un rôle dominant.

2.8.1 Pompes volumétriques

2.8.1.1 Principe et caractéristiques générales

Un volume V_0 de fluide, emprisonné dans un espace donné (le récipient initial), est forcé de se déplacer de l'entrée à la sortie de la pompe grâce à un système mécanique. Ce prélèvement dans la conduite d'aspiration crée une dépression qui attire le fluide vers la pompe par effet d'aspiration. Cette caractéristique confère aux pompes volumétriques leur capacité d'auto-amorçage.

Pour les liquides, il est crucial que la pression d'aspiration ne descende pas en dessous de la pression de vapeur saturante, sous peine de provoquer l'ébullition du liquide. Ce phénomène peut survenir sur tout type de machine (voir explications ci-après).

Le débit théorique moyen est directement proportionnel à la vitesse de rotation. Cependant, si le volume aspiré ne peut pas être évacué par la canalisation de sortie (en raison d'une vanne fermée ou d'une obstruction), l'augmentation de la pression pourrait entraîner soit l'éclatement de la conduite, soit le blocage du moteur entraînant la pompe. Pour éviter ces risques, il est essentiel d'installer une soupape de sûreté à la sortie de la pompe.

2.8.1.2 Pompe à piston

Ces machines fonctionnent de manière alternative et requièrent l'utilisation de soupapes ou de clapets pour alterner entre l'aspiration et le refoulement du fluide. Leur principal inconvénient réside dans la génération d'un débit pulsé, entraînant des à-coups de pression.

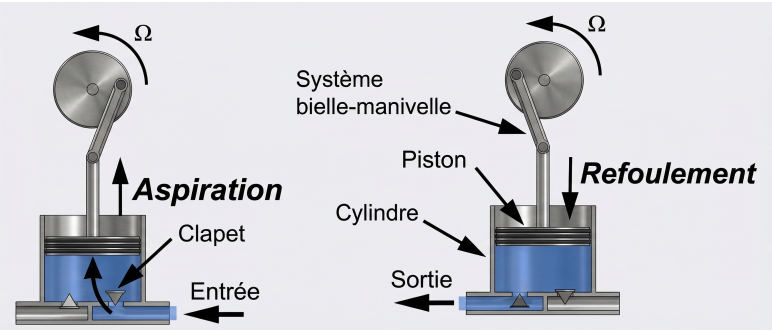


FIG. 10: Principe de fonctionnement d'une pompe alternative à piston : phases d'aspiration et de refoulement

Ce problème peut être atténué par l'installation d'un pot anti-bélier sur la conduite de refoulement. Un meilleur équilibrage de la machine peut être obtenu par l'association de plusieurs pistons opérant avec un déphasage judicieusement choisi.

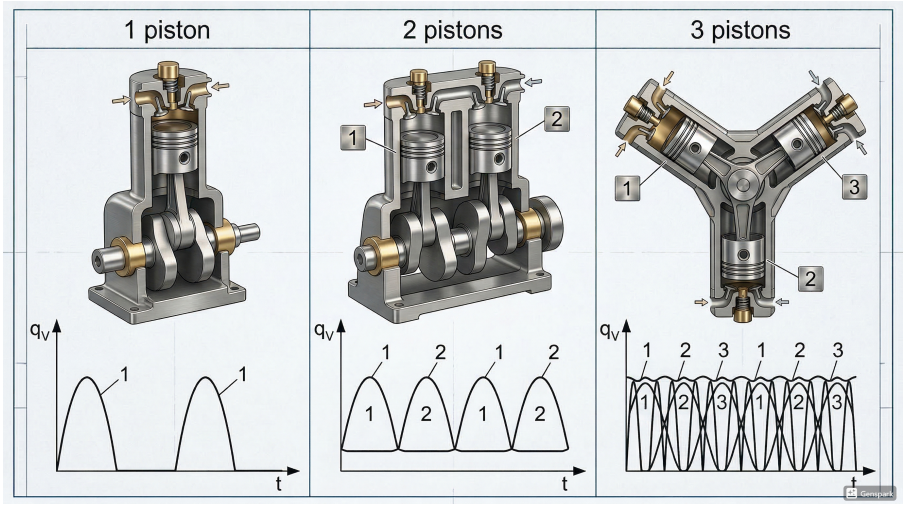


FIG. 11: Régularisation du débit par association de plusieurs pistons

Les pompes à piston se distinguent par leur robustesse et leur bon rendement, particulièrement au-delà d'une certaine taille. Elles sont souvent utilisées comme pompes doseuses et équipées de pistons à course réglable. Cependant, leur système d'étanchéité limite leur utilisation avec des fluides contenant des particules solides.

2.8.1.3 Pompe à diaphragme

Les pompes à diaphragme, également appelées pompes à membrane, se caractérisent par l'absence de contact direct entre le fluide pompé et les organes mobiles de la machine. Cette particularité les rend particulièrement adaptées au transfert des liquides corrosifs et/ou contenant des particules solides.

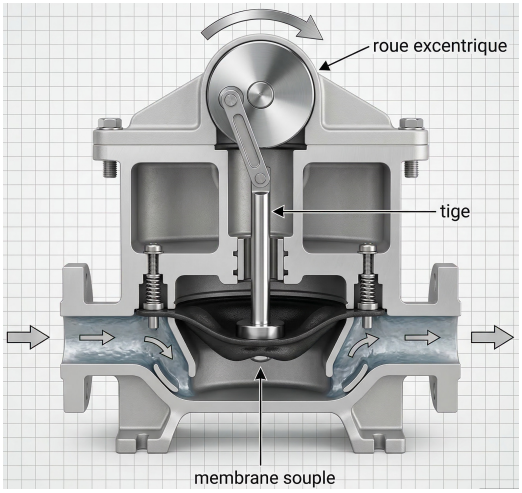


FIG. 12: Coupe transversale d'une pompe à membrane à commande excentrique

2.8.1.4 Pompe à piston plongeur

La pompe à piston plongeur constitue un compromis technique entre la pompe à piston classique et la pompe à membrane. Contrairement à cette dernière, le fluide n'y est pas isolé du piston. En revanche, les frottements sont réduits, car ils se limitent au presse-étoupe, qui assure l'étanchéité autour du plongeur. Ce principe rend ces pompes particulièrement adaptées à la production de hautes pressions.

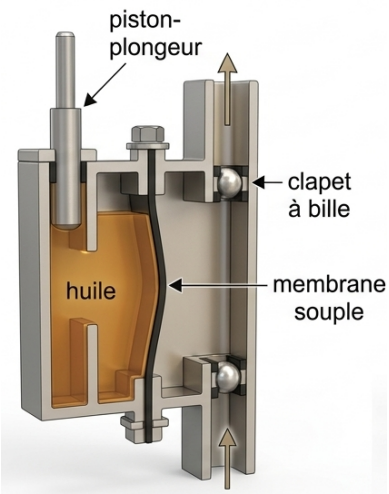


FIG. 13: Coupe transversale d'une pompe à piston plongeur

Ce type de pompe allie ainsi la robustesse et l'efficacité volumétrique d'une pompe à piston à la capacité de générer des pressions élevées, tout en limitant l'usure des composants mobiles. La simplicité de sa conception favorise une maintenance aisée, et son étanchéité maîtrisée permet de véhiculer des fluides variés, y compris légèrement chargés ou lubrifiants. Grâce à ces caractéristiques, elle est largement utilisée dans les applications industrielles nécessitant un débit stable sous haute pression, telles que le nettoyage haute pression, la découpe au jet d'eau ou le transfert de produits visqueux.

2.8.1.5 Pompe à engrenage

La pompe à engrenages est une pompe volumétrique rotative constituée de deux pignons dentés tournant en sens inverse à l'intérieur d'un carter usiné avec précision. Du côté de l'aspiration, le désengagement progressif des dents crée une dépression qui aspire le fluide, lequel est ensuite transporté le long de la paroi du carter dans les cavités inter-dentaires. À la zone d'engrènement centrale, le contact permanent entre les deux pignons forme un joint dynamique qui empêche tout retour du fluide vers l'amont, garantissant ainsi l'étanchéité interne de la machine.

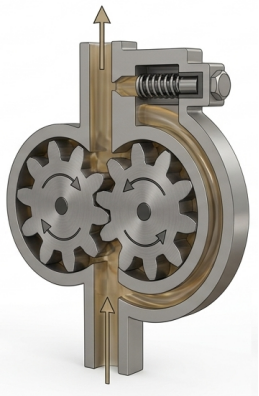


FIG. 14: Coupe transversale d'une pompe à engrenage

Ces pompes sont particulièrement adaptées au transport de fluides visqueux tels que les huiles hydrauliques et les lubrifiants. Elles délivrent un débit quasi constant de l'ordre de **80 à 100 $\mathbf{m^3/h}$**, avec des pressions maximales de refoulement comprises entre **10 et 15 bar**, ce qui en fait un choix fiable pour toute application nécessitant une alimentation régulière et maîtrisée.

2.8.1.6 Pompe à palettes rigides

La pompe à palettes, couramment désignée sous le terme de **pompe à vide**, est constituée d'un rotor excentré tournant à l'intérieur d'un cylindre fixe. Des palettes mobiles, logées dans les rainures du rotor et maintenues en contact permanent avec la paroi interne du cylindre par des ressorts et la force centrifuge, délimitent des chambres de volume variable. Au cours de la rotation, l'expansion de ces chambres crée la dépression nécessaire à l'aspiration du fluide, tandis que leur réduction provoque le refoulement.

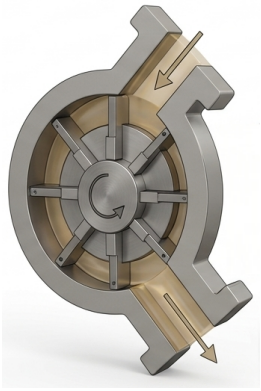


FIG. 15: Coupe transversale d'une pompe à palettes rigides

Ce principe de fonctionnement assure un débit relativement régulier et continu, caractéristique essentielle des machines volumétriques rotatives. En raison de leur capacité à traiter des fluides de faible densité et compressibles, les pompes à palettes sont particulièrement bien adaptées au pompage des gaz.

2.8.1.7 Pompe péristaltiques

La pompe péristaltique fonctionne selon un principe simple et efficace : des galets rotatifs viennent écraser progressivement un tuyau souple flexible, propulsant ainsi le fluide contenu à l'intérieur vers le refoulement. Ce mécanisme garantit un écoulement parfaitement doux, sans turbulence ni cisaillement, ce qui préserve l'intégrité du fluide transporté. De plus, l'absence totale de contact entre le fluide et les organes mécaniques de la pompe en fait un choix privilégié pour les applications nécessitant une hygiène stricte ou impliquant des fluides sensibles, corrosifs ou chargés.



FIG. 16: Coupe transversale d'une pompe péristaltiques

Sur le plan des performances, le débit de ces pompes reste limité à des valeurs de l'ordre de **60 à 80 m^3/h**. En revanche, elles offrent un rendement volumétrique de **100%**, sans fuite interne possible, ce qui en fait la **pompe doseuse par excellence**, idéale pour toute application exigeant une précision et une reproductibilité rigoureuses du débit.

2.8.1.8 Diagnostic des problèmes inhérents aux pompes volumétriques

Le diagnostic des dysfonctionnements des pompes volumétriques repose sur l'observation rigoureuse des symptômes constatés lors de l'exploitation. Le tableau suivant récapitule les principaux problèmes rencontrés, leurs causes possibles ainsi que les actions correctives à entreprendre.

PROBLÈMES	CAUSES POSSIBLES	CORRECTIFS
Signes de cavitation ; cognements ; vibrations ; pulsations irrégulières	Le N.P.S.H. est-il respecté ? Coup de bélier ?	Vérifier l'aspiration pour le niveau de liquide ; voir s'il y a une obstruction ou si la vanne est partiellement fermée. Vérifier les chambres anti-bélier.
Bruits suspects ; vibrations	Pompe bien ancrée au sol ? Socle bien ancré au massif ? Lubrification déficiente. Cavitation.	Vérifier l'alignement de l'arbre. Lubrifier. La pression absolue doit être supérieure à $(\text{N.P.S.H.})_R$.
Pression de refoulement déficiente ; Faible débit	Vitesse de pompage. Poche d'air en amont de la pompe. Clapets défectueux. Presse-garniture défectueux. Garnitures défectueuses. Liquide de scellement manquant. Fuite dans la conduite. Soupape de décharge défectueuse. Échauffement du moteur ou de la pompe.	Vérifier les courroies s'il y a lieu. Vérifier les conditions à l'aspiration. Effectuer les réparations nécessaires.
Échauffement du moteur ou de la pompe	Frottement excessif de la garniture. Frottement du piston ; manque de lubrification. Défectuosité mécanique : paliers, alignement, arbre faussé.	Effectuer les corrections nécessaires.

TAB. 4: Diagnostic des problèmes inhérents aux pompes volumétriques

2.8.2 Pompes Hydrodynamiques ou Turbopompes

2.8.2.1 Description et fonctionnement

Les pompes hydrodynamiques, également appelées pompes cinétiques, sont de construction relativement simple. Dans leur version de base, elles sont constituées d'une pièce en rotation — le **rotor**, aussi désigné sous les termes de roue ou d'hélice — qui tourne à l'intérieur d'un carter fixe appelé **corps de pompe**. Le principe de fonctionnement repose sur la communication d'une certaine vitesse au fluide, puis sur la conversion de cette énergie cinétique en énergie de pression. La distinction entre les pompes centrifuges, hélicocentrifuges et à hélice repose essentiellement sur la direction de la vitesse imprimée au fluide lors de son passage dans la roue.

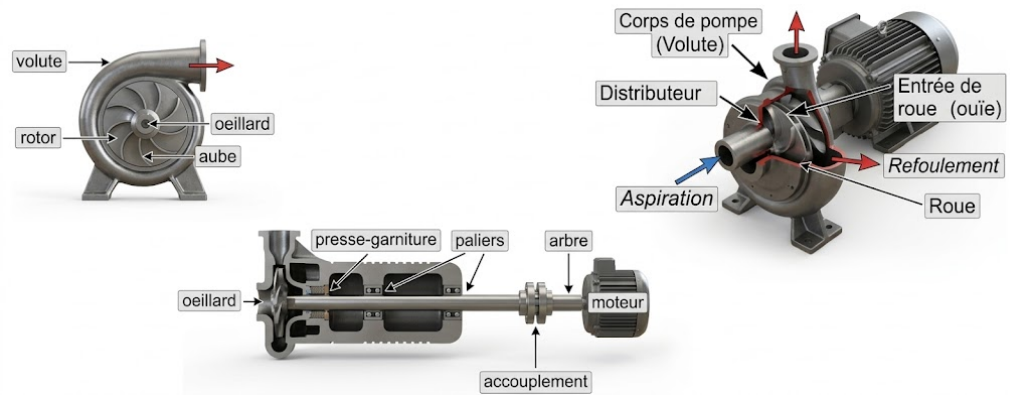


FIG. 17: Architecture et Composants d'une Pompe Hydrodynamique (Turbopompe) : Vues en Coupe et Principes de Fonctionnement

Le fonctionnement d'une pompe hydrodynamique s'articule autour de trois phases successives :

- **Aspiration :** lorsque la pompe est amorcée, c'est-à-dire pleine de liquide, la rotation de la roue accélère le fluide à l'entrée. Cette augmentation de vitesse engendre une chute de pression dans l'ouïe (entrée de la roue), créant ainsi une dépression qui assure l'aspiration continue du fluide et le maintien de l'amorçage.
- **Accélération :** au sein de la roue, la rotation communique au fluide une vitesse croissante, tandis que la force centrifuge le comprime vers la périphérie, augmentant progressivement sa pression. Les aubes sont généralement incurvées et inclinées vers l'arrière par rapport au sens de rotation, afin d'optimiser le transfert d'énergie, bien que d'autres géométries soient possibles selon les applications. Il est par ailleurs possible de monter des roues de différentes caractéristiques dans un même corps de pompe, en fonction des propriétés du fluide à traiter.
- **Refoulement :** à la sortie de la roue, le fluide pénètre dans une zone élargie appelée volute, qui se comporte comme un divergent. La vitesse du fluide y diminue progressivement, et l'énergie cinétique est convertie en énergie de pression, permettant ainsi le refoulement du fluide vers le circuit aval.

Remarque importante : la vitesse de rotation d'une pompe hydrodynamique ne peut varier que dans un intervalle limité. De ce fait, le réglage du débit s'effectue généralement par l'intermédiaire d'une vanne placée sur la conduite de refoulement, ou par un dispositif de *by-pass* — un circuit de court-circuit — qui renvoie une fraction du fluide refoulé vers l'entrée de la pompe.

2.8.2.2 Avantages et inconvénients des turbo-pompes

Les turbo-pompes présentent de nombreux atouts qui expliquent leur large diffusion dans l'industrie. Ce sont des machines de conception simple, dépourvues de clapets ou de soupapes, d'utilisation aisée et d'un coût relativement modéré. Plus précisément, on peut citer les avantages suivants :

- à caractéristiques hydrauliques égales, elles sont plus compactes que les machines volumétriques, ce qui facilite leur intégration dans les installations ;
- leur rendement est généralement supérieur à celui des pompes volumétriques, en particulier pour les forts débits ;
- elles sont adaptées à une très large gamme de liquides, des plus courants aux plus spécifiques ;
- leur débit est régulier et leur fonctionnement silencieux, ce qui limite les nuisances vibratoires et sonores ;

- en cas de colmatage partiel ou d'obstruction de la conduite de refoulement, la pompe ne subit aucun dommage et l'installation ne risque pas d'éclater : la pompe se comporte alors simplement comme un agitateur.

Cependant, les turbo-pompes présentent également certaines limitations qu'il convient de prendre en compte lors du choix d'un équipement :

- elles ne peuvent pas pomper des liquides trop visqueux, sous peine d'une chute importante des performances ;
- la pression différentielle qu'elles génèrent reste relativement modeste, généralement comprise entre **0,5 et 10 bar** ;
- elles ne sont pas auto-amorçantes et nécessitent donc une procédure d'amorçage préalable à chaque démarrage ;
- à l'arrêt, elles ne s'opposent pas à l'écoulement du liquide par gravité, ce qui impose la mise en place de vannes d'isolement appropriées pour éviter tout retour de fluide.

2.8.2.3 Pression différentielle engendrée par la pompe

Considérons une installation dans laquelle une pompe tournant à vitesse constante élève un liquide depuis un réservoir inférieur A pour le refouler vers un réservoir supérieur B, comme illustré sur la figure 18. On distingue deux zones de travail de la pompe : entre les points **A** et **E**, le fluide s'élève par dépression — on dit que la pompe travaille à **l'aspiration** — tandis qu'entre les points **S** et **B**, elle travaille au **refoulement**. La pression différentielle engendrée par la pompe est alors définie par :

$$\Delta p_P = p_S - p_E \tag{2.92}$$

En appliquant le théorème de Bernoulli entre les points A et B, en tenant compte des pertes de charge

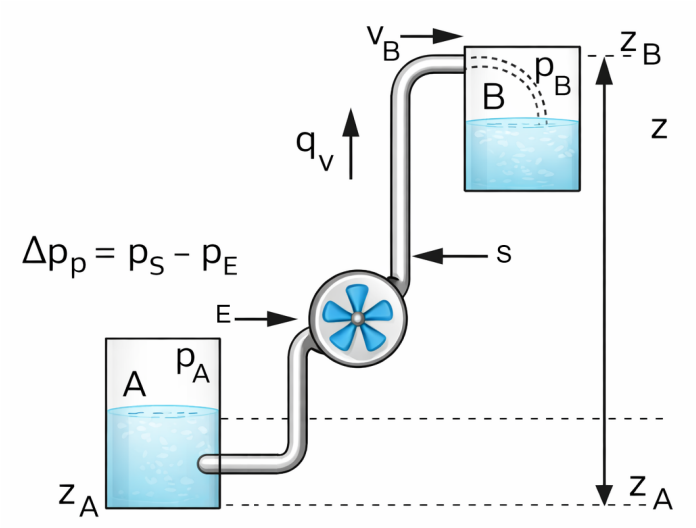


FIG. 18: Schéma d'une installation de pompage centrifuge – élévation d'un liquide entre deux réservoirs

Δp_C dans les conduites, on obtient :

$$p_A + \rho g z_A + \frac{1}{2}\rho v_A^2 + \Delta p_P = p_B + \rho g z_B + \frac{1}{2}\rho v_B^2 + \Delta p_C \tag{2.93}$$

On en déduit l'expression de la pression différentielle fournie par la pompe :

$$\boxed{\Delta p_P = p_S - p_E = (p_B - p_A) + \rho g(z_B - z_A) + \frac{1}{2}\rho\left(v_B^2 - v_A^2\right) + \Delta p_C} \quad \text{(E)}$$

La vitesse en A étant généralement négligeable devant celle en B, le terme cinétique $\frac{1}{2}\rho v_A^2$ est souvent omis dans les applications pratiques. Par ailleurs, la **hauteur manométrique totale** ΔH_P, également appelée hauteur théorique d'élévation, est définie comme l'équivalent en colonne de liquide de la pression différentielle engendrée par la pompe :

$$\Delta H_P = \frac{\Delta p_P}{\rho g} \tag{2.94}$$

2.8.2.4 Caractéristique pression-débit

La caractéristique pression-débit, notée $\Delta p_P = f(Q_V)$ et également appelée **caractéristique débitante**, représente l'évolution de la pression différentielle — ou de manière équivalente, de la hauteur manométrique totale — en fonction du débit volumique délivré par la pompe. Pour les pompes de conception courante, cette courbe est décroissante : la pression différentielle diminue à mesure que le débit augmente, traduisant la limite de la capacité de la machine à fournir simultanément un débit élevé et une forte pression.

Les courbes caractéristiques **pression-débit** sont systématiquement fournies par les constructeurs pour différentes vitesses de rotation, comme illustré sur la figure 19. Elles sont généralement accompagnées d'autres courbes essentielles au dimensionnement, notamment la courbe de rendement de la pompe et la courbe du N.P.S.H. requis en fonction du débit, permettant ainsi une sélection optimale de la pompe pour un point de fonctionnement donné.

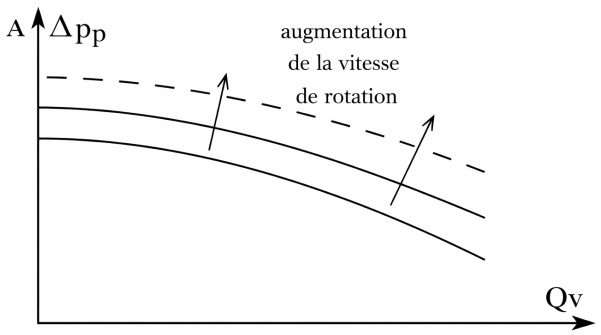


FIG. 19: Courbes caractéristiques pression-débit pour différentes vitesses de rotation

2.8.2.5 Point de fonctionnement

La caractéristique **pression-débit** de la pompe étant connue, la détermination du point de fonctionnement de l'ensemble **{POMPE + INSTALLATION}** nécessite également la connaissance des besoins hydrauliques de l'installation, représentés par la courbe **charge-débit**. Pour le cas d'une installation acheminant un liquide du réservoir A vers le réservoir B, le besoin en pression de l'installation s'exprime par :

$$\Delta p_I = (p_B - p_A) + \rho g(z_B - z_A) + \frac{1}{2}\rho\left(v_B^2 - v_A^2\right) + \Delta p_C \tag{2.95}$$

Les pressions et les hauteurs géodésiques aux points A et B étant constantes et indépendantes du débit, seuls les termes cinétiques et les pertes de charge Δp_C varient avec Q_V. Or, les pertes de charge étant proportionnelles au carré de la vitesse d'écoulement, la caractéristique résistante de l'installation peut se mettre sous la forme parabolique suivante :

$$\boxed{\Delta p_I = C^{ste} + k \cdot v^2} \qquad \text{(E')}$$

dont l'allure est effectivement parabolique, comme illustré sur la figure 20.

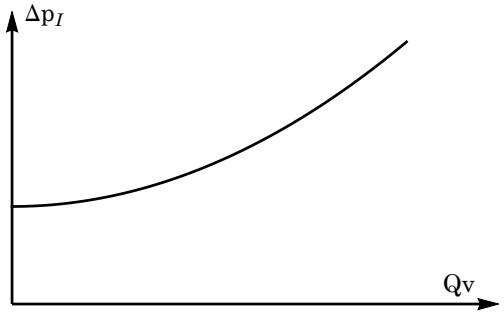


FIG. 20: Courbe caractéristique résistante de l'installation $\Delta p_I = f(Q_V)$

Le point de fonctionnement de l'ensemble pompe-installation est défini par le couple $(Q_{V,0},\ \Delta p_{P,0})$ pour lequel la pression fournie par la pompe est exactement égale au besoin en pression de l'installation, soit :

$$\Delta p_P = \Delta p_I \qquad \text{autrement dit,} \quad \text{(E)} = \text{(E')} \qquad (2.96)$$

Graphiquement, ce point de fonctionnement correspond à l'intersection des deux courbes caractéristiques — celle de la pompe et celle de l'installation — comme représenté sur la figure 21. Il constitue le seul régime stable pour lequel l'équilibre entre l'énergie fournie par la pompe et l'énergie consommée par l'installation est assuré.

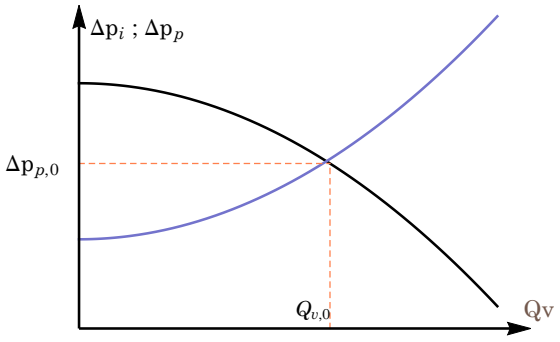


FIG. 21: Détermination graphique du point de fonctionnement par intersection des courbes pompe et installation

2.8.2.6 Caractéristiques de vitesse et Conditions d'aspiration – NPSH

Le fonctionnement d'une pompe centrifuge est entièrement défini par trois paramètres fondamentaux : la pression différentielle Δp_P (ou la hauteur manométrique totale ΔH_P), le débit volumique Q_V, et la vitesse de rotation de la roue Ω (exprimée en rad/s ou en tr/s). Ces trois grandeurs sont liées par les lois de similitude, qui établissent les proportionnalités suivantes :

- $Q_V \propto \Omega$ le débit est proportionnel à la vitesse de rotation ;
- $\Delta p_P \propto \Omega^2$ la pression différentielle varie comme le carré de la vitesse ;
- $P \propto \Omega^3$ la puissance fournie par la pompe au liquide varie comme le cube de la vitesse.

Ces relations sont particulièrement utiles pour prédire les performances d'une pompe lorsque sa vitesse de rotation est modifiée, sans avoir à recourir à de nouveaux essais expérimentaux.

La capacité d'une pompe à fonctionner correctement en aspiration constitue un critère de dimensionnement essentiel, notamment lorsque la hauteur géométrique d'aspiration est importante, ou lorsque le liquide pompé est volatil, à température élevée, ou stocké sous vide. Le critère de faisabilité retenu est le **N.P.S.H.** (*Net Positive Suction Head*), traduit en français par **« Charge Positive Nette à l'Aspiration »**. Il représente la pression minimale nécessaire à l'entrée de la roue pour garantir un fonctionnement sans cavitation, c'est-à-dire pour maintenir en tout point de la pompe une pression supérieure à la pression de vapeur saturante p_{VS} du liquide.

Le constructeur fournit la courbe du **N.P.S.H. requis**, qui tient compte de la chute de pression engendrée par l'accélération du fluide à l'entrée de la roue. Quantitativement, il correspond au supplément minimal de pression qu'il faut ajouter à p_{VS} au niveau de l'entrée de la pompe, afin que la pression en tout point intérieur ne descende jamais en dessous de p_{VS}. La condition de bon fonctionnement s'écrit donc :

$$\mathrm{NPSH}_{\mathrm{requis}} < p_T(E) - p_{VS} \tag{2.97}$$

ou de manière plus synthétique :

$$\boxed{\mathrm{NPSH}_{\mathrm{requis}} < \mathrm{NPSH}_{\mathrm{disponible}}} \tag{2.98}$$

Si cette condition n'est pas respectée, des phénomènes de dégazage puis de vaporisation partielle du liquide apparaissent à l'intérieur de la pompe. Ces phénomènes de **cavitation** entraînent une chute de pression dans l'ensemble de l'installation, ainsi qu'une dégradation progressive et irréversible de la roue sous l'effet de l'implosion des bulles de vapeur.

2.8.2.7 Amorçage d'une turbo-pompe

La pompe centrifuge n'est généralement pas auto-amorçante. En effet, lorsque le corps de pompe est rempli d'air, la roue en rotation ne peut engendrer une pression différentielle suffisante pour mettre le fluide en mouvement : la pompe tourne alors « à vide » sans assurer aucun débit. Les pompes immergées constituent une exception notable, car leur roue est en permanence en contact avec le liquide ; en revanche, dès que le niveau du liquide est inférieur au corps de pompe, un dispositif d'amorçage devient indispensable. Plusieurs méthodes d'amorçage sont envisageables selon les conditions d'installation, comme illustré sur la figure 22 :

- **Remplissage par eau sous pression (fig. a) :** lorsqu'une source d'eau sous pression est disponible, on introduit le liquide dans le corps de pompe via une conduite auxiliaire fixe ou un boyau amovible, en ouvrant simultanément l'évent pour permettre l'évacuation de l'air jusqu'à ce que la pompe soit entièrement noyée.
- **Pompe volumétrique auxiliaire (fig. b) :** en l'absence d'eau sous pression, une pompe volumétrique accessoire — manuelle ou mécanisée — est raccordée au corps de pompe afin de l'aspirer et de le remplir de liquide avant le démarrage.
- **Remplissage par dérivation (fig. c) :** si la vanne de refoulement est fermée et que la conduite de refoulement est déjà pleine de liquide, une dérivation permet de faire refluer le liquide vers le corps de pompe pour assurer son remplissage.

- **Éjecteur ou pompe volumétrique à vide (fig. d) :** un éjecteur ou une petite pompe volumétrique raccordé au corps de pompe permet d'en extraire l'air par aspiration et d'aspirer ainsi le liquide jusqu'à remplissage complet.

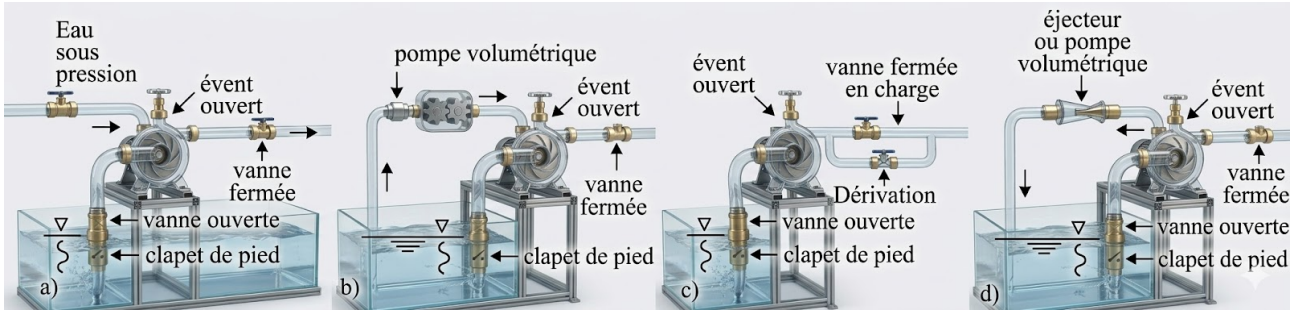


FIG. 22: Dispositifs d'amorçage d'une pompe centrifuge -(a) eau sous pression, (b) pompe volumétrique auxiliaire, (c) dérivation, (d) éjecteur ou pompe volumétrique

Enfin, il existe dans le commerce des dispositifs d'amorçage automatique qui s'enclenchent à chaque démarrage sans intervention de l'opérateur. Certains corps de pompe sont également conçus de façon à maintenir la roue en permanence immergée même à l'arrêt, conférant ainsi à la pompe un caractère **auto-amorçant**.

2.9 Exercices

Exercice 1

Deux grandes surfaces planes sont à $2.4\ cm$ l'une de l'autre et l'espace entre elle est rempli d'un liquide de viscosité $0.81\ Pa \cdot s$. Quelle est la force nécessaire pour tirer une plaque très fines $0.5\ cm^2$ de surface à une vitesse constante de $60\ cm/s$, si :

1 La plaque est située au milieu ;

2 La plaque est situé à $0.8\ cm$ d'une des surfaces

Faites l'hypothèse que le profil des vitesses est linéaire.

Exercice 2

Une grande plaque mobile située entre deux grandes plaques fixes. Deux liquides newtoniens de viscosités $\mu_1 = 0.02\ Pa \cdot s$ et $\mu_2 = 0.01\ Pa \cdot s$ sont contenus entre les deux plaques (voir Fig.).

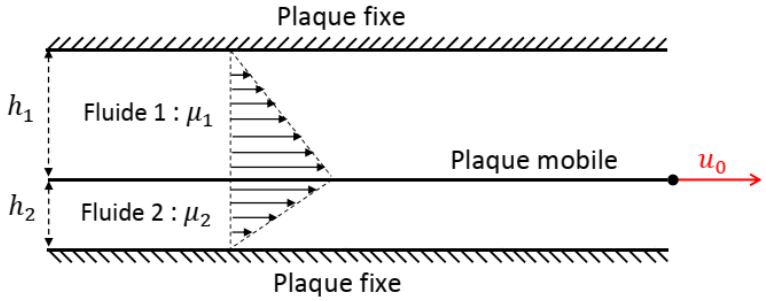


FIG. 23: Deux fluides différents entre trois plaques : deux sont fixes et l'autre mobile

Déterminer l'intensité des contraintes sur chacune des parois quand la plaque centrale mobile se déplace à une vitesse de $4\ m/s$ parallèlement aux autres plaques. Faites l'hypothèse que le profil des vitesses entre les plaques est linéaire.

Exercice 3

Un viscosimètre (couette) est composé de deux cylindres coaxiaux de rayons $12.2\ cm$ et $12.8\ cm$ respectivement (voir Fig.). Les deux cylindres ont $30\ cm$ de longueur. Un couple de $0.88\ N \cdot m$ est nécessaire pour tourner le cylindre interne à une vitesse de rotation de $2\pi\ rad/s$.

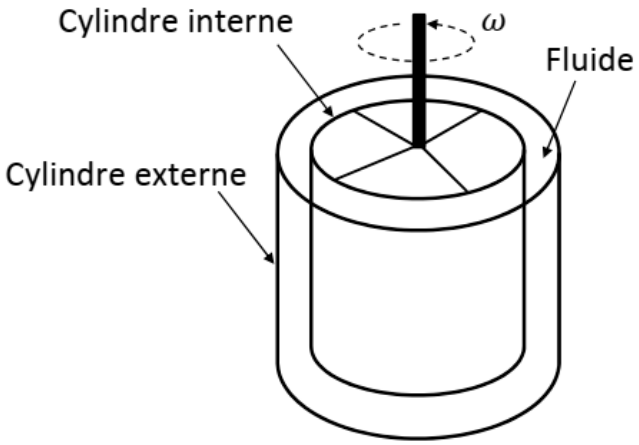


FIG. 24: Fluide entre deux cylindres coaxiaux

Déterminer la viscosité dynamique du liquide qui remplit l'espace entre les deux cylindres

Exercice 4

Soit un tube cylindrique de $3\ km$ de longueur et de $10\ cm$ de diamètre, parcouru par un liquide de viscosité dynamique $\mu = 8.5\ poise$. On suppose que la distribution des vitesses dans la section droite du tube est donnée par l'équation parabolique

$$u(y) = -y^2 + 10y \tag{2.99}$$

u étant la vitesse à la distance y de la paroi, calculer :

1 La contrainte de cisaillement au niveau de la paroi.

2 La force totale de frottements s'exerçant sur le tube

Exercice 5

Une plaque carrée de $0.64\ m^2$ de surface pèse $300\ N$ et glisse sur une surface inclinée ($\alpha = 30°$) lubrifiée par un film d'huile d'une épaisseur $e = 1.5\ mm$ comme montré sur la figure 25.

Si la vitesse de la plaque est $0.3\ m/s$, déterminer la viscosité dynamique de l'huile.

Exercice 6

Du fuel lourd de viscosité dynamique $\mu = 0.11\ Pa \cdot s$ et de densité $d = 0.932$ circule dans un tuyau de longueur $L = 1650\ m$ et de diamètre $D = 25\ cm$ à un débit volumique $Q_v = 19.7\ l/s$. On donne la masse volumique de l'eau $\rho_{eau} = 1000\ kg/m^3$.

1 Déterminer la viscosité cinématique ν du fuel.

2 Calculer la vitesse d'écoulement V.

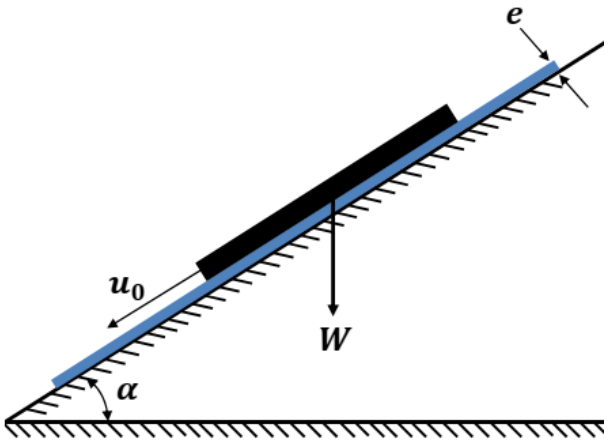


FIG. 25: Glissement d'une plaque sur un plan incliné

3 Calculer le nombre de Reynolds Re.

4 En déduire la nature de l'écoulement.

5 Déterminer le coefficient de pertes de charge linéaire.

6 Calculer la perte de charge J_l dans le tuyau.

Exercice 7

Un pipe-line de diamètre $d = 25\ cm$ et de longueur L est destiné à acheminer du pétrole brut d'une station A à une station B avec un débit massique $Q_m = 18\ kg/s$.

On suppose que le pipe-line est horizontal. Les caractéristiques physiques du pétrole sont les suivantes : masse volumique $\rho = 900\ kg/m^3$, viscosité dynamique $\mu = 0.261\ Pa \cdot s$.

1- Calculer le débit volumique Q_v du pétrole.

2- Déterminer sa vitesse d'écoulement V.

3- Calculer le nombre de Reynolds Re.

4- Quelle est la nature de l'écoulement ?

5- Calculer la valeur du coefficient de pertes de charge linéaire λ.

6- Exprimer la relation de Bernoulli entre A et B.

7- Déterminer la longueur L maximale entre deux stations A et B à partir de laquelle la chute de pression $p_A - p_B$ dépasse $3\ bar$.

Exercice 8

Un fluide de masse volumique $\rho = 961\ kg/m^3$ a une vitesse moyenne $V = 1.5\ m/s$ dans une conduite horizontale de diamètre $d = 120\ mm$ à partir d'un réservoir de très grande section et ouvert à l'air libre (voir Fig.26).

Sur la partie horizontale de ce tube sont installés deux manomètres distants de $L = 130\ m$. On relève une chute de pression $p_1 - p_2 = 1.5\ bar$.

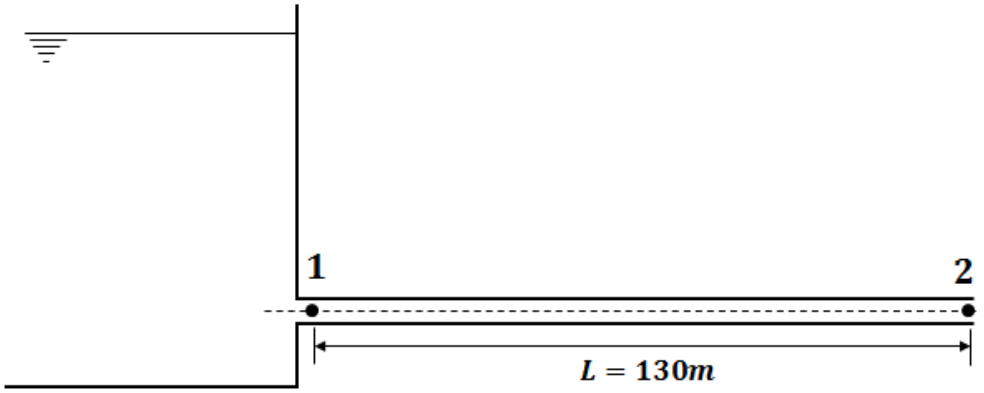


FIG. 26: Ecoulement dans une conduite horizontale

1- En appliquant le théorème de Bernoulli, déterminer la valeur du coefficients de pertes de charge linéaire λ en fonction de $p_1 - p_2$, ρ, L, d et V.

2- On suppose que l'écoulement est laminaire, calculer le nombre de Reynolds en fonction de λ.

3- En déduire la viscosité cinématique du fluide.

Exercice 9

Une pompe à essence de rendement $\eta = 67.4\%$ et de débit volumique $q_v = 0.629\ l/s$ assure le remplissage d'un réservoir d'automobile. La pompe aspire l'essence de masse volumique $\rho = 750\ kg/m^3$ à partir d'une grande citerne dont la surface libre située à une altitude z_1 et une pression $p_1 = p_{atm} = 1\ bar$. On suppose que le niveau d'essence varie très lentement $(V_1 = 0)$. La pompe refoule l'essence, à une altitude z_2, sous forme d'un jet cylindrique, en contact avec l'atmosphère avec une pression $p_2 = p_{atm} = 1\ bar$, se déversant dans le réservoir de l'automobile à une vitesse V_2. La différence des altitudes entre la section de sortie de la conduite et la surface libre de la citerne est $H = z_2 - z_1 = 2\ m$.

La conduite a une longueur $L = 3.32\ m$ et un diamètre $d = 2\ cm$. La viscosité dynamique de l'essence est $\mu = 0.0006\ Pa \cdot s$. L'accélération de la pesanteur est $g = 9.81\ m/s^2$.

1- Déterminer la vitesse d'écoulement V_2 de l'essence dans la conduite.

2- Calculer le nombre de Reynolds Re.

3- Déterminer la nature d'écoulement.

4- Calculer le coefficient de pertes de charge linéaire λ.

5- En déduire la perte de charge linéaire h_l.

6- Appliquer le théorème de Bernoulli généralisé, et calculer la puissance P_a sur l'arbre de la pompe.

Chapitre 3

Écoulement laminaire de fluides newtoniens

Tous les fluides réels sont visqueux par nature. La viscosité est la propriété d'un fluide qui résiste au mouvement d'une couche de fluide par rapport à une couche adjacente. Elle produit des contraintes tangentielles ou de cisaillement dans un fluide en mouvement. Selon la domination de la viscosité, l'écoulement visqueux peut être classé en écoulement laminaire et écoulement turbulent. Dans l'écoulement laminaire, les particules du fluide se déplacent le long de trajectoires parallèles droites dans des couches (laminae ou feuilles) et il n'y a pas de mélange de particules de fluide entre deux couches adjacentes. Cela se produit à faible vitesse de sorte que les forces dues à la viscosité prédominent sur les forces inertielles. La viscosité induit un mouvement relatif à l'intérieur du fluide lorsque les couches de fluide glissent les unes sur les autres. Le gradient de vitesse entre les couches donne naissance à des contraintes de cisaillement. La module de la contrainte de cisaillement visqueux varie de point en point, étant maximale au niveau de la frontière et diminuant progressivement avec l'augmentation de la distance par rapport à la frontière. Afin de surmonter la résistance au cisaillement à l'écoulement, la pression diminue de section en section dans la direction de l'écoulement, de sorte qu'un gradient de pression existe. Dans un écoulement turbulent, le mouvement des particules de fluide est irrégulier, où il se déplace de manière hétérogène et les lignes de courant sont des courbes erratiques.

Dans le premier chapitre, l'effet de la viscosité n'a pas été pris en compte lorsque le fluide s'écoule. Cette idéalisation d'un écoulement non visqueux simplifie grandement les mathématiques impliquées dans l'analyse. Cependant, une telle idéalisation échoue à expliquer de nombreux phénomènes où la force visqueuse est très importante et dans de tels cas, il n'est pas souhaitable de négliger ces forces. Dans ce chapitre, l'effet de la viscosité a été introduit pour formuler les solutions mathématiques de différents problèmes pratiques. Des expressions relatives aux contraintes de cisaillement et aux gradients de pression dans l'écoulement laminaire sont développées et appliquées pour analyser de nombreux cas d'écoulement laminaire, tels que l'écoulement de Couette, l'écoulement de Poiseuille et l'écoulement à travers un anneau. Des relations entre le champ de vitesse, le débit, la contrainte de cisaillement, le gradient de pression et la géométrie du champ d'écoulement laminaire ont également été établies dans ce chapitre.

3.1 Loi rhéologique des fluides newtoniens

Considérons une mince couche d'un fluide contenue entre deux plans parallèles espacés d'une distance h, comme illustré dans la Figure 1. Maintenant, si dans des conditions d'état stable, le fluide est soumis à un cisaillement par l'application d'une force F comme montré, cela sera équilibré par une force de frottement interne égale et opposée dans le fluide. Pour un fluide newtonien incompressible en écoulement laminaire, la contrainte de cisaillement résultante est égale au produit du taux de cisaillement et de la viscosité du milieu fluide.

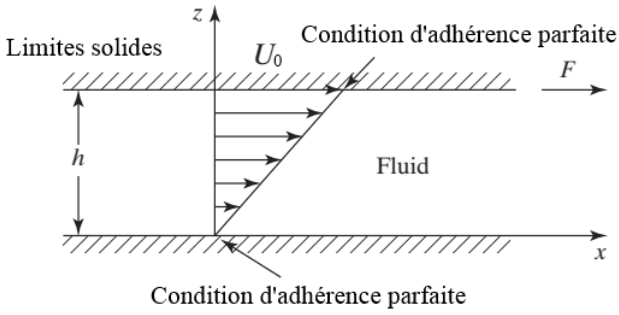


FIG. 1: Représentation de l'écoulement à cisaillement unidirectionnel

Dans ce cas simple, le taux de cisaillement peut être exprimé comme le gradient de vitesse dans la direction perpendiculaire à celle de la force de cisaillement, c'est-à-dire,

$$\tau_{xz} = \frac{F}{A} = \mu\left(-\frac{du}{dy}\right) = \mu\dot{\gamma}_{xz} \tag{3.1}$$

Notez que le premier exposant en indice sur τ et $\dot{\gamma}$ indique la direction normale à celle de la surface de cisaillement, tandis que le deuxième exposant fait référence à la direction de la force et de l'écoulement. En considérant l'équilibre d'une couche de fluide, il est facile de voir qu'à toute surface de cisaillement, il existe deux contraintes de cisaillement égales et opposées - une contrainte positive sur le fluide se déplaçant plus lentement et une contrainte négative sur la couche de fluide se déplaçant plus rapidement. Le signe négatif du côté droit de l'équation (3.1) indique que τ_{xz} est une mesure de la résistance au mouvement. On peut également voir la situation sous un autre angle : pour un fluide incompressible de densité ρ, l'équation (3.1) peut être écrite comme suit :

$$\tau_{xz} = -\frac{\mu}{\rho}\frac{d}{dy}(\rho u) \tag{3.2}$$

La quantité ρu est la quantité de mouvement linéaire dans la direction x par unité de volume du fluide et donc τ_{xz} représente le flux de quantité de mouvement dans la direction z et le signe négatif indique que le transfert de quantité de mouvement se produit dans la direction de la diminution de la vitesse, ce qui est également conforme à la loi de Fourier sur le transfert de chaleur et à la loi de Fick sur le transfert de masse par diffusion.

La constante de proportionnalité, μ (ou le rapport entre la contrainte de cisaillement et le taux de cisaillement), appelée viscosité newtonienne par définition, est indépendante du taux de cisaillement $\dot{\gamma}_{xz}$ ou de la contrainte de cisaillement τ_{xz} et dépend uniquement du matériau, de sa température et de sa pression. Le tracé de la contrainte de cisaillement τ_{xz} en fonction du taux de cisaillement $\dot{\gamma}_{xz}$ pour un fluide newtonien, appelé "courbe d'écoulement" ou "rhéogramme", est donc une ligne droite de pente μ, passant par l'origine ; la seule constante, μ, caractérise ainsi complètement le comportement d'écoulement d'un fluide newtonien à une température et une pression fixes. Les gaz, les liquides organiques simples, les solutions de sels inorganiques de faible poids moléculaire sont tous des fluides newtoniens. Les données de contrainte de cisaillement et de taux de cisaillement présentées dans la Figure 2 démontrent le comportement de fluide newtonien d'une huile de cuisson et d'un sirop de maïs.

3.2 Équations de Navier-Stokes

Lors du développement des équations de la dynamique des fluides au Chapitre précédent, nous avons remarqué que leur solution analytique générale est quasiment impossible. Il existe cependant plusieurs cas simples pour lesquels nous pouvons réellement dériver une solution contenant des informations physiques im-

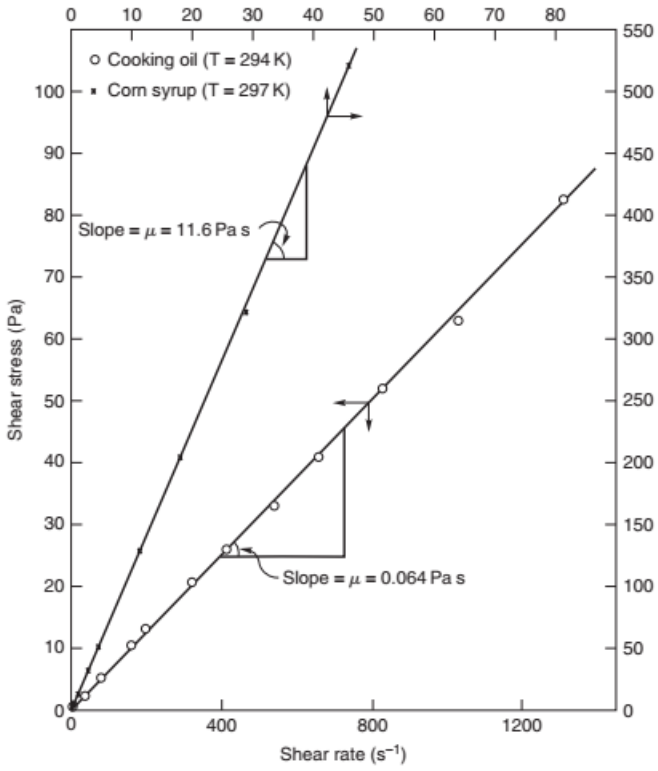


FIG. 2: Données typiques de contrainte de cisaillement et de taux de cisaillement pour une huile de cuisson et un sirop de maïs [2]

portantes. L'un des exemples les plus réussis est l'écoulement visqueux dans les tuyaux circulaires, qui fournit la justification pour développer une base de données expérimentale pour aider dans des problèmes d'ingénierie plus complexes (mais similaires). Avant de commencer, réécrivons les équations gouvernantes pour les écoulements visqueux, incompressibles et en régime permanent. L'équation de continuité est ((6.101)) :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \tag{3.3}$$

et les équations de quantité de mouvement visqueuses incompressibles [à partir de l'équation (2.35)] dans des coordonnées cartésiennes sont :

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} = f_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \tag{3.4}$$

$$u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} = f_y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\mu}{\rho}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) \tag{3.5}$$

$$u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} = f_z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\mu}{\rho}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) \tag{3.6}$$

Ici, nous avons négligé les forces volumiques. Cependant, si la force gravitationnelle est présente, son effet peut être réintroduit dans le terme de gradient de pression.

En coordonnées cylindrique (r, θ, x), ces equations peuvent se mettre sous la forme :

$$\frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} + u_x\frac{\partial u_r}{\partial x} - \frac{u_\theta^2}{r} = f_r - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\mu}{\rho}\left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial x^2} - \frac{u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}\right) \tag{3.7}$$

$$\frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_r\frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_x\frac{\partial u_\theta}{\partial x} - \frac{u_r u_\theta}{r} = f_\theta - \frac{1}{\rho}\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{\mu}{\rho}\left(\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial x^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r^2}\right) \tag{3.8}$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} + u_r\frac{\partial u_x}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_x}{\partial \theta} + u_x\frac{\partial u_x}{\partial x} = f_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho}\left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_x}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_x}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}\right) \tag{3.9}$$

3.3 Écoulement de Couette

Commençons par l'exemple le plus simple, l'écoulement entre deux plaques parallèles (infinies), comme illustré dans la figure 3.

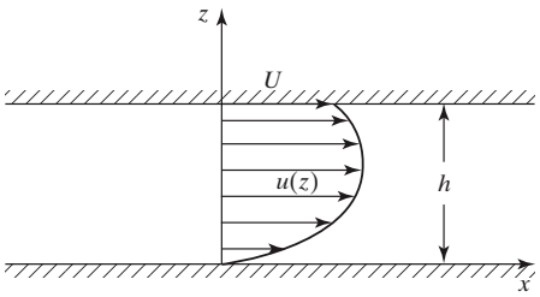


FIG. 3: Écoulement laminaire entre deux plaques parallèles infinies

Le fluide est considéré visqueux et incompressible, et dans ce cas, nous négligeons les dérivées temporelles et les forces volumiques. Nous supposons également que l'écoulement est laminaire, et cette affirmation sera clarifiée vers la fin du chapitre. Utilisons un système de coordonnées cartésiennes attaché à la plaque inférieure, comme illustré dans la figure 3, et les équations gouvernantes pour ce cas sont résumées par les équations (3.3), (3.4), (3.5) et (3.6). En observant la figure 3, nous pouvons supposer que la plaque inférieure est stationnaire et donc la vitesse près de la paroi inférieure est nulle (à $z = 0$). Nous pouvons spéculer sur la forme de la distribution de vitesse (comme indiqué) ; cependant, il est clair que la vitesse à $z = h$ est égale à la vitesse de la plaque supérieure, U. Cet écoulement est appelé L'ÉCOULEMENT DE COUETTE d'après Maurice Marie Alfred Couette (1858–1943), un physicien français. Le modèle est en 2D et il n'y a pas de changements dans la direction y. De plus, il n'y a pas de vitesse dans la direction z, et nous résumons cela comme :

$$v = w = 0 \tag{3.10}$$

Dans ce cas, l'équation (3.3) devient :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \tag{3.11}$$

Ce qui implique que le profil de vitesse est une fonction de z et qu'il est le même pour n'importe quelle valeur de x.

$$u = u(z) \tag{3.12}$$

Les plaques s'étendent à l'infini et il est donc évident que le profil de vitesse $u(z)$ est le même à n'importe quel x. Ensuite, nous appliquons toutes les hypothèses précédentes aux équations de Navier-Stokes, qui se réduisent maintenant à :

$$0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \tag{3.13}$$

$$0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} \tag{3.14}$$

$$0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} \tag{3.15}$$

Les deux dernières équations indiquent qu'il n'y a aucun changement latéral ou vertical dans la pression. Par conséquent, la pression ne peut changer qu'avec x et est constante verticalement :

$$p = p(x) \tag{3.16}$$

De plus, il s'agit d'un problème à l'état stationnaire, et l'équation (3.11) indique qu'il n'y a pas de changements dans u avec x. Ainsi, si le deuxième terme de l'équation (3.13) est constant le long de l'axe x, alors nous concluons que le gradient de pression doit également être constant :

$$\frac{dp}{dx} = Cte \tag{3.17}$$

À ce stade, seule l'équation (3.13) reste, et après réarrangement, elle devient :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x} \tag{3.18}$$

Après avoir intégré deux fois, nous obtenons :

$$u(z) = \frac{1}{\mu}\frac{dp}{dx}\frac{z^2}{2} + Az + B \tag{3.19}$$

3.3.1 Écoulement avec une Surface Supérieure en Mouvement

Ce cas est l'écoulement de Couette original, et les conditions aux limites pour l'équation (3.19) sont :

$$\begin{aligned} &\text{à } z = 0 \quad u = 0 \\ &\text{à } z = h \quad u = U \end{aligned} \tag{3.20}$$

En substituant la condition $z = 0$ dans l'équation (3.19), on obtient que $B = 0$, et la deuxième condition

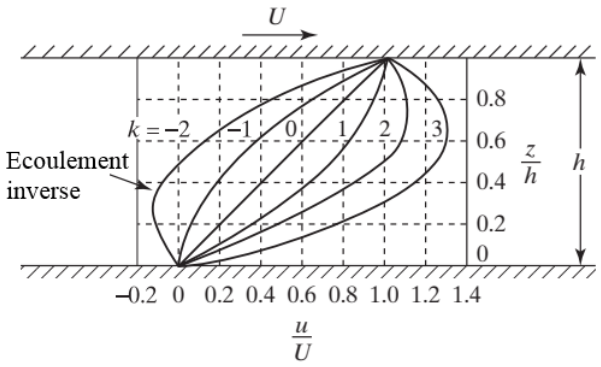


FIG. 4: Influence du gradient de pression sur le profil de vitesse de l'écoulement entre deux plaques en mouvement relatif

limite donne :

$$U = \frac{1}{\mu}\frac{dp}{dx}\frac{h^2}{2} + Ah \tag{3.21}$$

qui donne :

$$A = \frac{U}{h} - \frac{h}{2\mu}\frac{dp}{dx} \tag{3.22}$$

En substituant ce résultat dans l'équation (3.19), on obtient la distribution de vitesse à n'importe quelle position x :

$$u(z) = U\left(\frac{z}{h}\right) - \frac{h^2}{2\mu}\frac{dp}{dx}\left(\frac{z}{h}\right)\left(1 - \frac{z}{h}\right) \tag{3.23}$$

Le premier terme est clairement une variation linéaire et se réduit au profil d'écoulement de cisaillement discuté en référence à la Figure 3. Le deuxième terme parabolique contient l'effet du gradient de pression,

et cet effet est résumé dans la Figure 4. Pour visualiser cela, définissons une constante k telle que :

$$k = -\frac{h^2}{2\mu}\frac{dp}{dx} \tag{3.24}$$

Lorsque $k = 0$, nous obtenons l'écoulement de cisaillement de base, et lorsque le gradient de pression est favorable (dp/dx négatif ou k positif), nous obtenons une distribution de vitesse avant supplémentaire de forme parabolique, comme montré. Lorsque le gradient de pression s'oppose à l'écoulement, alors cette forme parabolique est inversée. À des valeurs négatives plus élevées de k, des écoulements inverses sont même possibles.

3.3.2 Résultats

Avec les hypothèses posées pour l'écoulement visqueux entre des plaques parallèles, nous sommes en fait parvenus à la « solution exacte ». Il est important de relier ces résultats à des grandeurs d'ingénierie telles que la vitesse moyenne. Ainsi, la vitesse moyenne U_m est la vitesse qui, lorsqu'elle est multipliée par la surface d'entrée, aura le même débit volumique Q_v (par unité de largeur) :

$$Q_v = U_m \cdot h = \int_0^h u(z)dz \tag{3.25}$$

Par conséquent, nous définissons la vitesse moyenne comme :

$$U_m = \frac{1}{h}\int_0^h u(z)dz \tag{3.26}$$

En utilisant l'équation (3.23), on trouve :

$$\begin{aligned} U_m &= \frac{1}{h}\int_0^h \left[U\left(\frac{z}{h}\right) - \frac{h^2}{2\mu}\frac{dp}{dx}\left(\frac{z}{h}\right)\left(1-\frac{z}{h}\right)\right]dz \\ &= \frac{U}{2}\left(\frac{z}{h}\right)^2 - \frac{h^2}{2\mu}\frac{dp}{dx}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{z}{h}\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{z}{h}\right)^3\right]_0^h \\ &= \frac{U}{2} - \frac{h^2}{12\mu}\frac{dp}{dx} \end{aligned} \tag{3.27}$$

Maintenant, nous pouvons également résoudre pour le débit volumique (par unité de largeur) :

$$Q_v = \frac{Uh}{2} - \frac{h^3}{12\mu}\frac{dp}{dx} \tag{3.28}$$

La Figure 4 montre les différentes distributions de vitesse en fonction du gradient de pression. Pour calculer la vitesse maximale, nous devons dériver la distribution de vitesse :

$$\frac{du}{dz} = \frac{U}{h} - \frac{h^2}{2\mu}\frac{dp}{dx}\left(\frac{1}{h} - \frac{2z}{h^2}\right) = 0 \tag{3.29}$$

et après avoir résolu pour z, nous obtenons :

$$\frac{z}{h} = \frac{1}{2} - \frac{\mu}{h^2}\frac{U}{\frac{dp}{dx}} \tag{3.30}$$

Notez que cette équation n'est pas valide lorsque dp/dx approche zéro. L'autre observation importante est que dans cet écoulement visqueux, il y a un effort de cisaillement. Cette force agit entre les couches de fluide parallèles lorsqu'elles glissent les unes sur les autres (créant du frottement). Pour calculer l'ef-

fort de cisaillement (par unité de largeur), nous utilisons les définitions que nous avons déjà introduites précédemment et la distribution de vitesse de l'équation (3.23) :

$$\tau_{xz} = \mu \frac{du}{dz} = \mu \frac{U}{h} - \frac{h^2}{2} \frac{dp}{dx} \left(\frac{1}{h} - \frac{2z}{h^2} \right) \tag{3.31}$$

Du point de vue de l'ingénierie, la détermination de la force de cisaillement sur la surface solide est importante. Par conséquent, un coefficient de frottement C_f peut être défini comme le rapport entre la contrainte de cisaillement et la pression dynamique moyenne :

$$C_f \equiv \frac{\tau_{xz}}{\frac{1}{2}\rho U_m^2} \tag{3.32}$$

Le calcul de ce coefficient est important sur les parois supérieure et inférieure, qui peuvent être trouvées à partir de l'équation (3.31).

$$\tau_{xz}|_0 = \mu \frac{U}{h} - \frac{h}{2} \frac{dp}{dx} \tag{3.33}$$

$$\tau_{xz}|_h = \mu \frac{U}{h} + \frac{h}{2} \frac{dp}{dx} \tag{3.34}$$

3.3.3 Écoulement de cisaillement sans gradient de pression

Prenons cet cas initial pour revoir notre modèle introductif expliquant les effets de la viscosité. La Figure 1 est redessinée ici dans la Figure 5, et le problème en question est le cas où la plaque supérieure se déplace à une vitesse U mais qu'il n'y a pas de gradient de pression :

$$\frac{dp}{dx} = 0 \tag{3.35}$$

La vitesse moyenne est obtenue à partir de l'équation (3.27) :

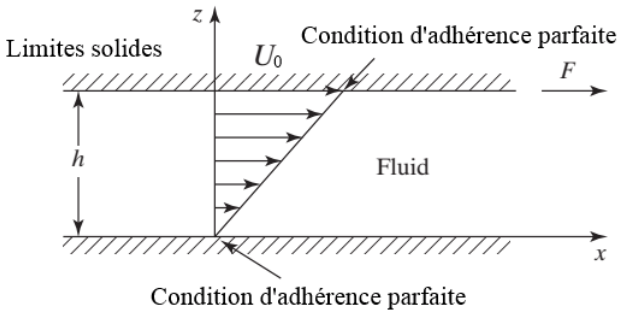


FIG. 5: L'écoulement entre deux plaques parallèles. La plaque supérieure se déplace à une vitesse U et la plaque inférieure est immobile.

$$U_m = \frac{U}{2} \tag{3.36}$$

et, comme prévu, c'est la vitesse à la ligne médiane. De même, le débit volumique par unité de largeur (équation (3.28)) est :

$$Q_v = \frac{Uh}{2} \tag{3.37}$$

et la vitesse maximale est au contact avec la plaque supérieure ($z = h$) :

$$U_{max} = U \tag{3.38}$$

La force de cisaillement sur la paroi, basée sur l'équation (3.31), est constante (avec z) et est la même sur les parois supérieure et inférieure :

$$\tau_{xz} = \mu \cdot \frac{U}{h} \tag{3.39}$$

Nous calculons le coefficient de frottement sur la surface supérieure ou inférieure en substituant les valeurs de contrainte de cisaillement et de vitesse moyenne :

$$C_f = \frac{\tau_{xz}}{\frac{1}{2}\rho U_m^2} = \frac{\mu\frac{U}{h}}{\frac{1}{2}\rho\frac{U^2}{4}} = \frac{8\mu}{\rho U h} \tag{3.40}$$

Voici un résultat très important car il introduit le nombre sans dimension dit de Reynolds, Re et qui représente le rapport entre les effets d'inertie et de viscosité :

$$Re = \frac{\rho U h}{\mu} \tag{3.41}$$

Ici, Re est basé sur l'espace libre h entre les plaques (mais dans d'autres cas, différentes grandeurs pour l'échelle de longueur peuvent être utilisées). Réécrivons le coefficient de friction pour ce cas :

$$C_f = \frac{8}{Re} \tag{3.42}$$

3.4 Écoulement de Poiseuille

Il s'agit d'un autre cas important d'écoulement entre plaques car cette fois-ci, les plaques supérieure et inférieure sont toutes deux immobiles. Par conséquent, le mouvement du fluide est dû au gradient de pression. Cet écoulement est appelé l'écoulement de Poiseuille d'après Jean Louis Marie Poiseuille (1799–1869), un médecin français qui a étudié la perte de pression dans les petits tubes. Essentiellement, ce cas a été résolu dans la section précédente, et des informations telles que la vitesse moyenne, la vitesse maximale et d'autres propriétés peuvent être obtenues en fixant simplement la vitesse de la plaque supérieure à zéro ($U = 0$). La distribution de vitesse, basée sur l'équation (3.23), est alors :

$$u(z) = -\frac{h^2}{2\mu}\frac{dp}{dx}\left(\frac{z}{h}\right)\left(1 - \frac{z}{h}\right) \tag{3.43}$$

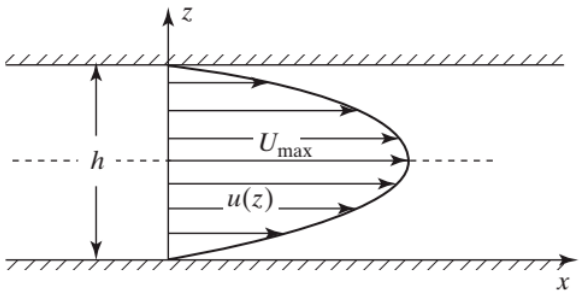


FIG. 6: Écoulement Poiseuille entre deux plaques parallèles

C'est une forme parabolique, comme indiqué dans la figure 6, et $u(z) = 0$ à $z = 0$ et à $z = h$. Cela établit également la relation entre la perte de pression et le frottement visqueux sur les parois. La vitesse moyenne est obtenue à partir de l'équation (3.27) :

$$U_m = -\frac{h^2}{12\mu}\frac{dp}{dx} \tag{3.44}$$

et le débit volumique (par unité de largeur) de l'équation (3.28) est :

$$Q_v = -\frac{h^3}{12\mu}\frac{dp}{dx} \tag{3.45}$$

Cela indique que le débit est directement lié au gradient de pression. L'emplacement de la vitesse maximale, basé sur l'équation (3.29), se trouve au niveau de la ligne médiane :

$$\frac{z}{h} = \frac{1}{2} \tag{3.46}$$

Lorsque cela est substitué dans la distribution de vitesse, équation (3.43), la vitesse maximale est trouvée :

$$U_{max} = -\frac{h^2}{8\mu}\frac{dp}{dx} \tag{3.47}$$

En comparant cela avec la vitesse moyenne, on obtient :

$$U_m = \frac{2}{3}U_{max} \tag{3.48}$$

En raison de la symétrie (supérieure/inférieure), la contrainte de cisaillement sur les deux parois est la même. Pour calculer le cisaillement, nous utilisons l'équation (3.31) (avec $U = 0$) :

$$\tau_{xz} = -\frac{h^2}{2}\frac{dp}{dx}\left(\frac{1}{h} - \frac{2z}{h^2}\right) \tag{3.49}$$

Notez que le cisaillement au centre (z = h/2) est nul et sur les parois ($z = 0$ et $z = h$) est :

$$\tau_p = \pm\frac{h}{2}\frac{dp}{dx} \tag{3.50}$$

Le coefficient de frottement C_f sur une paroi est alors :

$$C_f = \frac{-\frac{h}{2}\frac{dp}{dx}}{\frac{1}{2}\rho U_m^2} \tag{3.51}$$

Ce n'est pas une expression très utile, mais à partir de l'équation (3.44), nous pouvons résoudre le gradient de pression :

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{12\mu}{h^2}U_m \tag{3.52}$$

En substituant dans l'équation (3.51), on trouve :

$$C_f = \frac{12\mu}{\rho U_m h} \tag{3.53}$$

Nous voyons à nouveau que le nombre de Reynolds apparaît dans cette équation. En utilisant la définition de Re de l'équation (3.41), nous pouvons écrire :

$$C_f = \frac{12}{Re} \tag{3.54}$$

Il est intéressant de comparer la contrainte de cisaillement entre ce cas et l'écoulement de cisaillement de base. Tout d'abord, nous devons réorganiser le cisaillement sur la paroi en fonction de la vitesse maximale. Nous pouvons le faire en résolvant l'équation (3.47) pour dp/dx et en substituant le résultat dans l'équation

(3.50) :

$$\tau_p = \frac{h}{2}\frac{dp}{dx} = \frac{h}{2}\frac{8\mu U_{max}}{h^2} = 4\mu\frac{U_{max}}{h} \tag{3.55}$$

Sur la base de ces résultats, pour avoir la même contrainte pariétale, l'écoulement créé par la plaque supérieure en mouvement doit avoir une vitesse maximale quatre fois plus grande que dans le cas où le flux est créé par un gradient de pression (voir Fig.7)

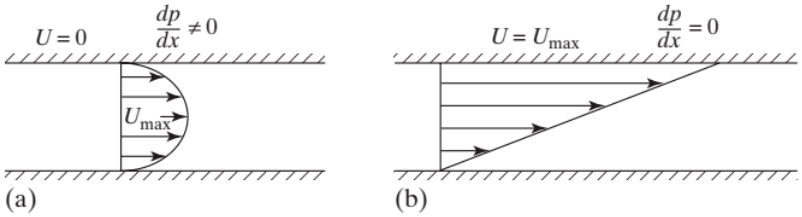


FIG. 7: Deux distributions de vitesse ayant la même contrainte pariétale

3.5 Écoulement de Hagen-Poiseuille

Les calculs, tels que la perte de pression dans les longs tuyaux circulaires, revêtent une importance capitale dans de nombreuses applications en ingénierie. Ils ont été largement étudiés au début du XIXe siècle par l'hydraulicien allemand G. H. L. Hagen (1797-1884) et le physiologiste français J. L. M. Poiseuille (1799-1869). La formulation mathématique de ce problème est similaire à celle utilisée pour l'écoulement entre des plaques parallèles ; cependant, un système de coordonnées cylindriques est maintenant utilisé. Le modèle de base est décrit dans la Fig.8 et l'on suppose que l'écoulement est incompressible, visqueux, laminaire et entièrement développé (loin des effets d'entrée et sans changements avec x).

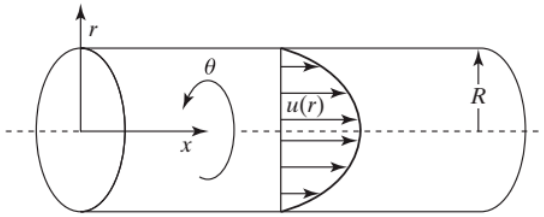


FIG. 8: Écoulement laminaire pleinement développé dans un tuyau circulaire.

L'écoulement à l'intérieur du pipeline se déplace uniquement dans la direction x sans composantes de vitesse dans les autres directions :

$$u_r = u_\theta = 0 \tag{3.56}$$

l'équation de continuité (equation (3.3)) dans les coordonnées cylindriques pour un fluide incompressible s'écrit :

$$\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_x}{\partial x} = 0 \tag{3.57}$$

Avec ces hypothèses, cette équation devient :

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = 0 \tag{3.58}$$

Nous supposons que l'écoulement est axisymétrique (et qu'il n'y a pas de changements avec θ), ce qui mène à :

$$u_x = u_x(r) \tag{3.59}$$

Les équations de la quantité de mouvement [Éqs. (3.7),(3.8), (3.9)] est maintenant réduites à :

$$-\frac{\partial p}{\partial r} = 0 \tag{3.60}$$

$$-\frac{\partial p}{\partial \theta} = 0 \tag{3.61}$$

$$-\frac{\partial p}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_x}{\partial r}\right) = 0 \tag{3.62}$$

À partir des équations (3.60) et (3.61), nous concluons que la pression varie uniquement dans la direction x :

$$p = p(x) \tag{3.63}$$

Étant donné que le terme à l'intérieur des parenthèses dans l'équation (3.62) est indépendant de x, le terme $\partial p/\partial x$ doit également être constant. Maintenant, nous pouvons réarranger l'équation (3.62) comme suit :

$$\frac{dp}{dx} = \mu\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{du_x}{dr}\right) \tag{3.64}$$

Une forme plus pratique est :

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{du_x}{dr}\right) = \frac{1}{\mu}\frac{dp}{dx}\cdot r \tag{3.65}$$

Maintenant, nous pouvons intégrer par rapport à r,

$$r\frac{du_x}{dr} = \frac{1}{\mu}\frac{dp}{dx}\cdot\frac{r^2}{2} + A \tag{3.66}$$

où A est la constante d'intégration. Nous divisons d'abord par r,

$$\frac{du_x}{dr} = \frac{1}{\mu}\frac{dp}{dx}\cdot\frac{r}{2} + \frac{A}{r} \tag{3.67}$$

Effectuons la deuxième intégration :

$$u_x = \frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx}\cdot\frac{r^2}{2} + A\ln r + B \tag{3.68}$$

Pour calculer la constante d'intégration, nous devons utiliser les conditions aux limites. Au centre du tuyau, il est clair qu'il y a une symétrie :

$$r = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{du_x}{dr} = 0 \tag{3.69}$$

$$r = R \quad \Rightarrow \quad u_x = 0 \tag{3.70}$$

On trouve le profil de vitesse suivant :

$$u_x(r) = \frac{R^2}{4\mu}\frac{dp}{dx}\left[\left(\frac{r}{R}\right)^2 - 1\right] \tag{3.71}$$

La vitesse maximale est au centre (r = 0) :

$$U_{max} = -\frac{R^2}{4\mu}\frac{dp}{dx} \tag{3.72}$$

Le signe négatif est du au fait que l'écoulement est dans la direction positive de x ce qui implique que le

gradient de pression doit être négatif. La vitesse moyenne est liée au débit volumétrique Q_v comme :

$$Q_v = U_m \cdot S = \int u_x dS \tag{3.73}$$

par conséquent, la vitesse moyenne est obtenue :

$$U_m = \frac{1}{S} \int u_x dS \tag{3.74}$$

où S est la surface de section transversale du tuyau et $dS = 2\pi r dr$. En substituant l'équation (3.71), on obtient

$$U_m = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R \frac{R^2}{4\mu} \frac{dp}{dx} \left[\left(\frac{r}{R} \right)^2 - 1 \right] 2\pi r dr = \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} \int_0^R \left[\frac{r^3}{R^2} - r \right] dr = \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} \left[\frac{r^4}{4R^2} - \frac{r^2}{2} \right]_0^R \tag{3.75}$$

On trouve :

$$U_m = -\frac{R^2}{8\mu} \frac{dp}{dx} \tag{3.76}$$

En comparant cela avec l'équation (3.72), on constate que :

$$U_{max} = 2U_m \tag{3.77}$$

Le débit volumique est donné par :

$$Q_v = U_m \cdot S = -\frac{R^2}{8\mu} \frac{dp}{dx} \cdot \pi R^2 = -\frac{\pi R^4}{8\mu} \frac{dp}{dx} \tag{3.78}$$

Ceci est un résultat très important car il montre la relation entre la chute de pression et le débit dans une conduite circulaire. La relation est linéaire avec la chute de pression indiquant l'augmentation du débit pour un gradient de pression plus élevé. En revanche, L'effet de la viscosité est opposé. Nous calculons la contrainte de cisaillement dans l'écoulement en dérivant l'équation (3.71) :

$$\tau_{xr} = -\mu \frac{du_x}{dr} - \mu \frac{R^2}{4\mu} \frac{dp}{dx} \frac{2r}{R^2} = -\frac{r}{2} \frac{dp}{dx} \tag{3.79}$$

Le signe négatif est le résultat du système de coordonnées (par exemple, l'origine est au centre). Notez que la contrainte de cisaillement est nulle aux centres et augmente linéairement vers la paroi. Le cisaillement au niveau de la paroi est alors :

$$\tau_p = -\frac{R}{2} \frac{dp}{dx} \tag{3.80}$$

Il est plus utile de remplacer la chute de pression par une formulation de vitesse moyenne. Nous le faisons en réarrangeant l'équation (3.76).

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{8\mu U_m}{R^2} \tag{3.81}$$

et en substituant cela dans l'équation (3.80), la contrainte pariétale devient :

$$\tau_p = \frac{2\mu}{R} U_{max} = \frac{4\mu}{R} U_m \tag{3.82}$$

Il est intéressant de comparer cela avec la relation de contrainte de cisaillement dans l'écoulement entre des plaques parallèles (avec une plaque se déplaçant à une vitesse de U_{max}, où $\tau_p = \frac{\mu}{h} U_{max}$). Si l'espace entre les deux plaques h est comparé au diamètre de la conduite ($2R$), alors le cisaillement dans la conduite est quatre fois plus important ! Une fois que la contrainte de cisaillement est évaluée, le coefficient de

frottement peut être calculé :

$$C_f = \frac{\tau_p}{\frac{1}{2}\rho U_m^2} = \frac{\frac{4\mu}{R}U_m}{\frac{1}{2}\rho U_m^2} = \frac{16\mu}{\rho U_m(2R)} = \frac{16}{Re} \tag{3.83}$$

C'est un très bon résultat qui est validé par des expériences et généralement applicable jusqu'à $Re = 2000$.

3.6 Écoulement dans une conduite annulaire

Considérons l'écoulement laminaire entièrement développé et visqueux entre deux cylindres concentriques (conduire de section annulaire), tel que représenté dans la figure 9. Nous pouvons commencer avec la solution obtenue dans l'équation (3.68) :

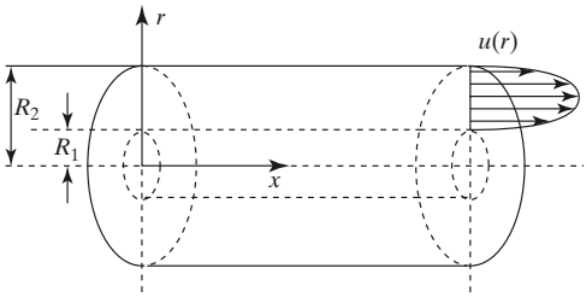


FIG. 9: Écoulement laminaire entièrement développé entre deux tuyaux circulaires concentriques.

$$u_x = \frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx}\cdot\frac{r^2}{2} + A\ln r + B \tag{3.84}$$

La différence réside maintenant dans les conditions aux limites car l'écoulement s'arrêtera au niveau de la paroi du cylindre intérieur. Par conséquent, les conditions aux limites sont :

$$r = R_1 \quad \Rightarrow \quad u_x = 0 \tag{3.85}$$
$$r = R_2 \quad \Rightarrow \quad u_x = 0 \tag{3.86}$$

En substituant ces conditions dans l'équation (3.84), on obtient deux équations :

$$\frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx}\cdot\frac{R_1^2}{2} + A\ln R_1 + B = 0 \tag{3.87}$$
$$\frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx}\cdot\frac{R_2^2}{2} + A\ln R_2 + B = 0 \tag{3.88}$$

Après avoir résolu pour les deux constantes, nous obtenons :

$$A = -\frac{1}{4\mu}\frac{dp}{dx}\frac{\left[\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 - 1\right]}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}\cdot R_1^2 \tag{3.89}$$

$$B = \frac{1}{4\mu}\frac{dp}{dx}\left[\frac{\left[\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 - 1\right]}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}\cdot R_1^2\cdot\ln R_1 - R_1^2\right] \tag{3.90}$$

Maintenant, nous obtenons la distribution de vitesse entre les deux cylindres concentriques en substituant A et B dans l'équation (3.84) :

$$u_x(r) = -\frac{1}{4\mu}\frac{dp}{dx}\left[R_1^2 - r^2 + \frac{\left[\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 - 1\right]}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} \cdot R_1^2 \cdot \ln\frac{r}{R_1}\right] \tag{3.91}$$

Nous pouvons obtenir le débit en intégrant la vitesse entre les deux limites :

$$\begin{aligned} Q_v = \int_{R_1}^{R_2} u_x dS &= -\int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{4\mu}\frac{dp}{dx}\left[R_1^2 - r^2 + \frac{\left[\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 - 1\right]}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} \cdot R_1^2 \cdot \ln\frac{r}{R_1}\right] 2\pi r dr \\ &= \frac{\pi}{4\mu}\frac{dp}{dx}\left[\frac{r^4}{2} - R_1^2 r^2 - \frac{\left[\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 - 1\right]}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} \cdot R_1^2\left(\ln\frac{r}{R_1} - \frac{1}{2}\right) r^2\right]_{R_1}^{R_2} \\ &= -\frac{\pi R_1^4}{8\mu}\frac{dp}{dx}\left[\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^4 - 1 - \frac{\left[\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 - 1\right]^2}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}\right] \end{aligned} \tag{3.92}$$

Nous calculons maintenant facilement la vitesse moyenne en divisant le débit par la surface :

$$U_m = \frac{Q_v}{\pi(R_2^2 - R_1^2)} = -\frac{R_1^2}{8\mu}\frac{dp}{dx}\left[\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 + 1 - \frac{\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 - 1}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}\right] \tag{3.93}$$

La contrainte de cisaillement sur la paroi extérieure est calculée comme précédemment :

$$\tau_{p2} = -\mu\frac{du_x}{dr}\bigg|_{R_2} = -\frac{R_1}{4}\frac{dp}{dx}\left[2\left(\frac{R_2}{R_1}\right) - \frac{\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 - 1}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} \cdot \left(\frac{R_1}{R_2}\right)\right] \tag{3.94}$$

et la contrainte de cisaillement sur la paroi du cylindre intérieur est :

$$\tau_{p1} = \mu\frac{du_x}{dr}\bigg|_{R_1} = -\frac{R_1}{4}\frac{dp}{dx}\left[\frac{\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 - 1}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} - 2\right] \tag{3.95}$$

Nous avons supprimé le signe négatif pour le cylindre intérieur car le gradient de vitesse y est positif.

3.7 Exercice

Exercice 1

Soit l'écoulement d'huile (voir Fig.) de viscosité cinématique $\nu = 0.1\ st$ et de vitesse $V0.05\ m/s$. Soit les coefficients de pertes de charge singulières : $\xi_1 = 0.7$, $\xi_2 = \xi_3 = 0.8$, $\xi_4 = 10$. Déterminer la perte de charge totale du circuit si le diamètre de la conduite $d = 20\ cm$, $L_1 = 30\ m$, $L_2 = 12\ m$ et $L_3 = 70\ m$. On donne $1\ st = 10^{-4}\ m^2/s$

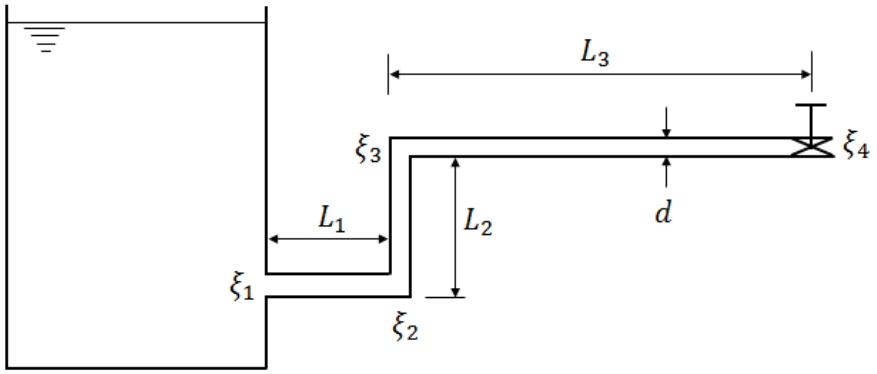


FIG. 10: Écoulement avec singularités

Exercice 2

On a un écoulement de Poiseuille d'une huile dans un tube de $12\ mm$ de diamètre, de longueur L, incliné d'un angle α (voir Fig.11) dont $\sin\alpha = 0.0445$.
La vitesse de l'écoulement est donnée par la relation suivante :

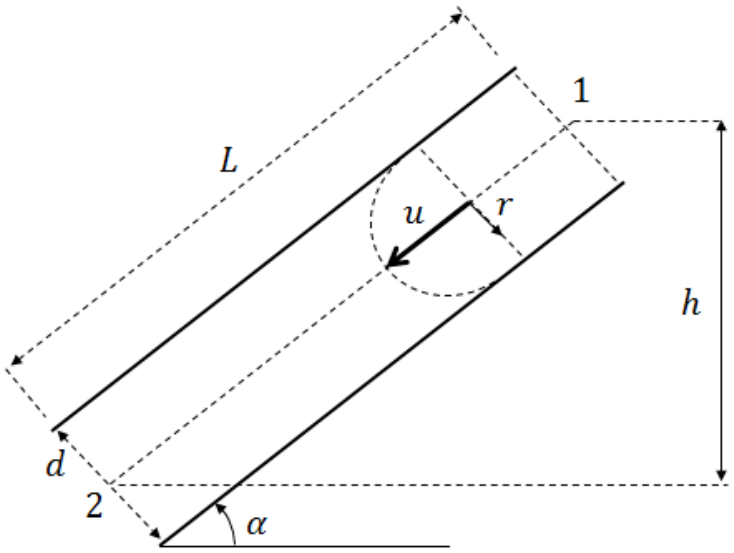


FIG. 11: Écoulement incliné

$$u = -\frac{1}{4\mu}\frac{dp}{dx}(R^2 - r^2) \tag{3.96}$$

Si la pression statique à l'intérieure est constante tout le long de tube, et le débit mesuré égale à $20\ l/heure$, déterminer la viscosité cinématique de cette huile.

Exercice 3

Un récipient cylindrique de $5\ cm$ de diamètre, laisse écouler un liquide visqueux qu'il contient par un tube horizontal (voir Fig.) de diamètre $1\ mm$ et de longueur $40\ cm$. Sachant qu'il a fallu 75 minutes pour que la charge en amont de tube passe de 5 à $2.5\ cm$.
Déterminer la viscosité cinématique du liquide (on négligera les effets dus aux extrémités de tube) ;

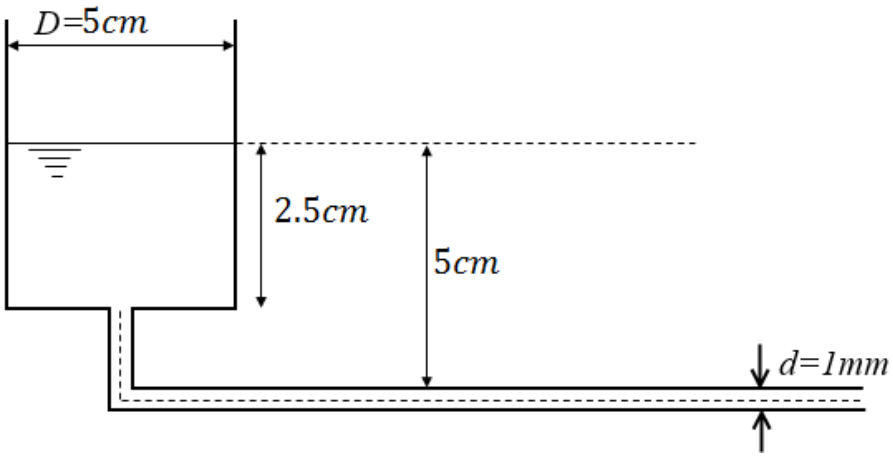


FIG. 12: Écoulement dans une conduite horizontale

l'écoulement dans le tube est permanent de type Poiseuille. On donne :

$$Q_v = \frac{\pi}{128}\frac{\Delta p}{L\mu}d^4 \tag{3.97}$$

Exercice 4

De l'eau s'écoule d'un récipient, entre deux plaques verticales parallèles, comme indiqué sur la figure. En supposant que la densité de l'eau soit $\rho = 1000kg/m^3$, la viscosité $\mu = 0.001kg/m \cdot s$, et l'espacement entre les plaques soit de $1\ cm$, calculez les valeurs suivantes :

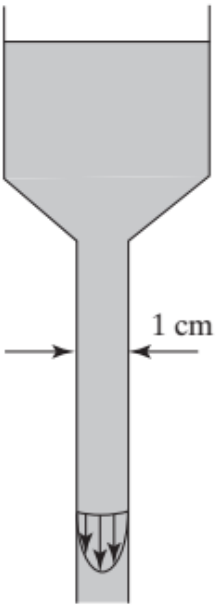


FIG. 13: Écoulement entre deux plaques verticales

(a) La vitesse maximale du film d'eau,

(b) La vitesse moyenne du film d'eau,

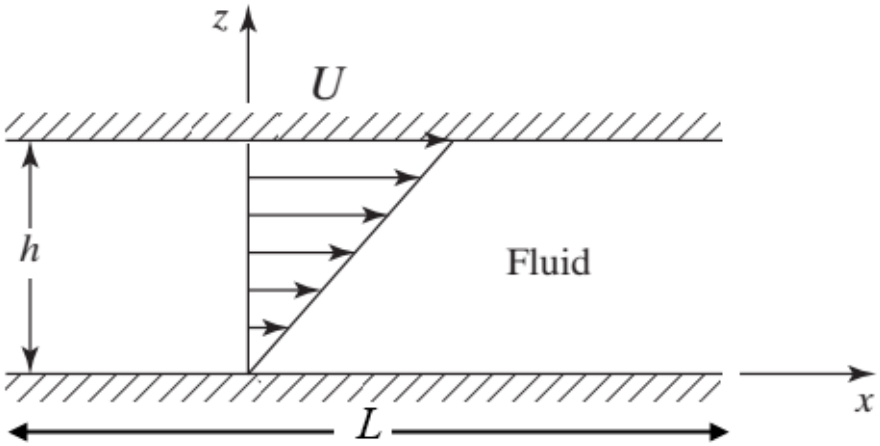
(c) Le débit,

(d) La force de cisaillement pariétale (par unité de surface),

(e) Le coefficient de frottement C_f

Exercice 5

On considère l'écoulement plan entre deux plaques distantes de h dont l'une est mobile à la vitesse U et l'autre est fixe. La largeur des parois est grande devant h ainsi que la longueur notée L. Le fluide a un comportement newtonien et l'écoulement est incompressible et permanent. On néglige le poids du fluide devant les forces de viscosité.



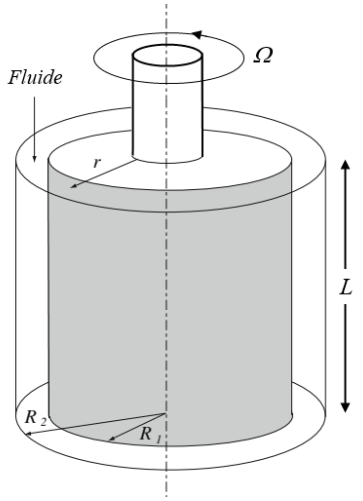
1- Montrer que le champ de vitesse est de la forme : $\vec{u} = (u_x(z), 0, 0)$

2- À partir des équations de Navier-Stokes, montrer que le champ de pression est uniforme en tout point et égal à la pression atmosphérique p_0 et que $u_x(z) = U\frac{z}{h}$.

3- Calculer le débit massique de l'écoulement.

Exercice 6

Un fluide est mis en écoulement dans l'entrefer de deux cylindres coaxiaux, le cylindre intérieur est de rayon R_1 et le cylindre extérieur est de rayon R_2. Le cylindre intérieur est en rotation uniforme avec une vitesse angulaire ω. On note L la hauteur des cylindres. Le fluide a un comportement newtonien (viscosité dynamique μ et masse volumique ρ) et l'écoulement est incompressible et permanent. On néglige le poids du fluide devant les forces de viscosité.



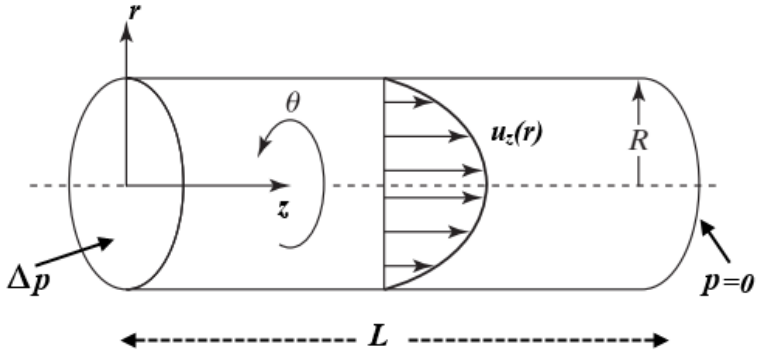
1- Montrer que le champ de vitesse est de la forme : $\vec{u} = (0, u_\theta(r), 0)$.

2- A partir des équations de Navier-Stokes, montrer que le champ de pression est uniforme en tout point du fluide et donner l'expression de $u_\theta(r)$.

3- Calculer le couple à appliquer au cylindre extérieur pour le maintenir fixe dans ces conditions

Exercice 7

Un fluide est mis en écoulement dans une conduite cylindrique de rayon R sous l'effet d'une surpression Δp entre l'entrée et la sortie de la conduite. On note L la longueur de la conduite. Le fluide est newtonien de viscosité dynamique μ et de masse volumique ρ et l'écoulement est incompressible et permanent. On néglige le poids du fluide devant les forces de viscosité.



1- Montrer que le champ de vitesse est de la forme : $\vec{u} = (0, 0, u_z(r))$.

2- À partir des équations de Navier-Stokes, montrer que le champ de pression est

$$p = \Delta p \left(1 - \frac{z}{L}\right) \quad \text{et que} \quad u_z(r) = \frac{\Delta p}{4\mu L}(R^2 - r^2)$$

3- Donner l'expression du débit massique de l'écoulement.

4- Donner l'expression de la contrainte pariétale

Chapitre 4

Rhéologie et fluides complexes

4.1 Définitions : Cisaillement, contrainte de cisaillement, déformation, viscosité

4.1.1 Contrainte de cisaillement

Du point de vue de la mécanique, la propriété essentielle des fluides est la possibilité de supporter des déformations arbitrairement grandes sans perte de cohésion. Les contraintes engendrées dans un fluide ne dépendent donc pas de l'amplitude de déformation, comme c'est le cas des solides. Pour un fluide au repos, son tenseur de contrainte est isotrope et ses contraintes tangentielles sont nulles. Sur chacun des axes, la contrainte normale est l'opposé de la pression (Fig. 1) : Par contre pour un fluide en mouvement, le tenseur

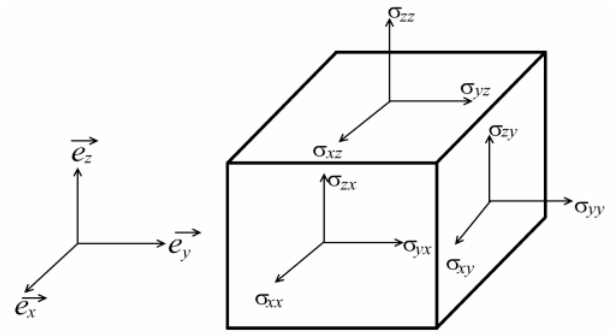


FIG. 1: Tenseur des contraintes

de contrainte σ_{ij} est décomposé en la somme d'une contribution isotrope, que nous connaissons comme pression p, et d'une contribution anisotrope, due à la viscosité du fluide, tel que :

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij} \tag{4.1}$$

$-p\delta_{ij}$: la partie sphérique
τ_{ij} : la partie déviatorique.
Les contraintes normales peuvent être visualisées comme étant composées de deux éléments : la pression isotrope et une contribution due à l'écoulement, c'est-à-dire,

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= -p + \tau_{xx} \\ \sigma_{yy} &= -p + \tau_{yy} \\ \sigma_{zz} &= -p + \tau_{zz} \end{aligned} \tag{4.2}$$

où les contributions τ_{xx}, τ_{yy}, τ_{zz} découlant de l'écoulement sont connues sous le nom de contraintes normales déviatoriques pour les fluides newtoniens et comme contraintes supplémentaires pour les fluides non newtoniens. Pour un fluide newtonien incompressible, la pression isotrope est donnée par :

$$p = -\frac{1}{3}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) \tag{4.3}$$

À partir des équations (4.2) et (4.3), il résulte :

$$\tau_{xx} + \tau_{yy} + \tau_{zz} = 0 \tag{4.4}$$

Pour un fluide newtonien en mouvement de cisaillement simple, les composantes de contrainte normale déviatoriques sont identiquement nulles, c'est-à-dire,

$$\tau_{xx} = \tau_{yy} = \tau_{zz} = 0$$

La contrainte de cisaillement correspond à la force de frottement par unité de surface qui s'exerce tangentiellement (parallèlement au mouvement) à la surface des strates. Elle varie donc d'une couche à l'autre, mais demeure constante en tout point d'une lamelle donnée. Elle est définie par :

$$\tau = \frac{dF}{dS} \tag{4.5}$$

Les forces normales exercées par une couche sur sa voisine sont généralement négligées.

4.1.2 Déformation

Deux couches d'une substance, situées dans la même section droite à l'instant initial, parcourent une distance du_x , après cisaillement entre un plan fixe et un plan mobile. La distance parcourue dépend de la vitesse propre de chaque couche par rapport au plan immobile. Dans le cas d'un mouvement unidimensionnel, la déformation de cisaillement est donnée par :

$$\gamma = \frac{du_x}{dy} \tag{4.6}$$

du_x : variation de déplacement.
dy : écart entre deux couches voisines.

4.1.3 Vitesse de cisaillement

Dans le cas d'un mouvement unidimensionnel la vitesse de cisaillement ou gradient de vitesse est définie par :

$$\dot{\gamma} = \frac{d\gamma}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{du_x}{dy}\right) = \frac{d}{dy}\left(\frac{du_x}{dt}\right) = \frac{dv}{dy} \tag{4.7}$$

4.2 Viscosité

La viscosité est une propriété du fluide, qui tend à empêcher ce dernier à se déformer lorsqu'il est soumis à une force tangentielle. Les fluides de grande viscosité résistent à l'écoulement et les fluides de faible viscosité s'écoulent facilement. La viscosité est déterminée par la capacité d'entraînement que possède une couche en mouvement sur les autres couches adjacentes. D'après l'hypothèse de Newton, la viscosité est une fonction qui relie le tenseur des contraintes à celui des taux de déformations, d'où la loi de Newton :

$$\tau = \mu \cdot \frac{d\gamma}{dt} = \mu \cdot \dot{\gamma} \quad \Rightarrow \quad \mu = \frac{\tau}{\dot{\gamma}} \tag{4.8}$$

4.2.1 Différentes définitions de la viscosité

4.2.1.1 Viscosité dynamique ou apparente

Par analogie avec les fluides newtoniens, on définit la viscosité d'un fluide non newtonien par :

$$\mu = \frac{\tau}{\dot{\gamma}} \ \ [N \cdot s/m^2] \text{ ou } Pa \cdot s \tag{4.9}$$

4.2.1.2 Viscosité cinématique

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \ \ [m^2/s] \tag{4.10}$$

4.2.1.3 Viscosité relative

Souvent cette dernière est utilisée pour l'étude des solutions ou des suspensions :

$$\mu_r = \frac{\mu}{\mu_s} \tag{4.11}$$

Où :
μ est la viscosité dynamique de la solution˙ μ_s est la viscosité dynamique du solvant

4.2.1.4 Viscosité spécifique

$$\mu_{sp} = \frac{\mu - \mu_s}{\mu_s} \tag{4.12}$$

4.2.1.5 Viscosité intrinsèque

$$\mu = \lim_{C \to 0} \left(\frac{\mu_{sp}}{C} \right) \tag{4.13}$$

Où C représente la concentration de la solution

4.2.1.6 Viscosité complexe

$$\mu^* = \frac{G''(\omega)}{\omega} + i\frac{G'(\omega)}{\omega} \tag{4.14}$$

Avec :
$G'(\omega)$ est le module de conservation.
$G''(\omega)$ est le module de perte.

Cette viscosité intervient pour des contraintes et des déformations sinusoïdales à pulsation ω, et des liquides présentant une certaine élasticité.

4.3 Fluides complexes (non-newtoniens) et lois rhéologiques

Un fluide non newtonien est un fluide dont la courbe d'écoulement $\tau = f(\dot{\gamma})$ est non linéaire ou ne passe pas par l'origine, c'est-à-dire lorsque la viscosité apparente,$\mu = \frac{\tau}{\dot{\gamma}}$, n'est pas constante à une température et une pression données, mais dépend des conditions d'écoulement telles que la géométrie de l'écoulement, le taux de cisaillement, etc. et parfois même de l'historique cinématique de l'élément de fluide considéré. De tels matériaux peuvent être regroupés de manière pratique en trois classes générales :

- Fluides pour lesquels le taux de cisaillement en tout point est déterminé uniquement par la valeur de la contrainte de cisaillement à ce point à cet instant ; ces fluides sont diversement connus sous le nom de indépendants du temps, purement visqueux , inélastiques ou fluides newtoniens généralisés (FNG).
- Fluides plus complexes pour lesquels la relation entre la contrainte de cisaillement et le taux de cisaillement dépend, en outre, de la durée du cisaillement et de leur historique cinématique ; ils sont appelés « fluides dépendant du temps ».
- Fluides présentant des caractéristiques à la fois des fluides purement visqueux et des solides élastiques et montrant une récupération élastique partielle après déformation ; celles-ci sont catégorisées comme des "fluides viscoélastiques".

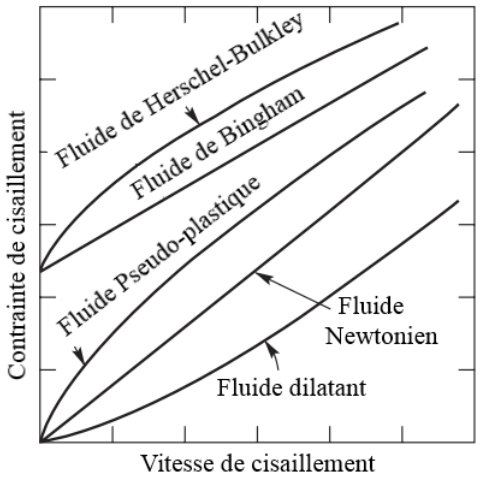


FIG. 2: Types de comportement rhéologique indépendant du temps

Ce schéma de classification est arbitraire dans la mesure où la plupart des matériaux réels présentent souvent une combinaison de deux voire de trois types de caractéristiques non newtoniennes. En général, il est toutefois possible d'identifier la caractéristique non newtonienne dominante et de la prendre comme base pour les calculs ultérieurs de processus. De plus, comme mentionné précédemment, il est pratique de définir une viscosité apparente de ces matériaux comme le rapport de la contrainte de cisaillement au taux de cisaillement, bien que ce dernier rapport soit une fonction de la contrainte de cisaillement ou du taux de cisaillement et/ou du temps. Chaque type de comportement de fluide non newtonien sera maintenant examiné en détail.

4.3.1 Comportements purement visqueux

Dans un cisaillement simple, le comportement rhéologique de cette classe de matériaux peut être décrit par une relation constitutive de la forme :

$$\tau = f(\dot{\gamma}) \tag{4.15}$$

ou sa forme inverse,

$$\dot{\gamma} = g(\tau) \tag{4.16}$$

Cette équation implique que la valeur de $\dot{\gamma}$ en tout point à l'intérieur du fluide sous cisaillement est déterminée uniquement par la valeur actuelle de la contrainte de cisaillement à ce point, ou vice versa. En fonction de la forme de la fonction dans l'équation (4.15) ou (4.16), ces fluides peuvent être subdivisés en trois types supplémentaires :

(a) Fluides rhéo-fluidifiants ou pseudo-plastiques.

(b) Fluides viscoplastiques (ou à contrainte seuil)

(c) Fluides rhéo-épaississants ou dilatants

Les courbes d'écoulement qualitatives sur des échelles linéaires pour ces trois types de comportement des fluides sont montrées dans la Figure 2 ; la relation linéaire typique des fluides newtoniens est également incluse.

4.3.1.1 Fluides rhéofluidifiants ou pseudoplastiques

Le type le plus courant de comportement des fluides non newtoniens indépendants du temps observé est la pseudoplasticité ou rhéofluidification, caractérisé par une viscosité apparente qui diminue avec l'augmentation du taux de cisaillement. À la fois à très faible et à très fort taux de cisaillement, la plupart des solutions polymères et des fondus présentant un caractère rhéofluidifiant exhibent un comportement newtonien, c'est-à-dire que les graphiques contrainte de cisaillement – taux de cisaillement deviennent des lignes droites, comme illustré de manière schématique dans la Figure 3, et sur une échelle linéaire passeront par l'origine. Les valeurs résultantes de la viscosité apparente à très faible et à très fort taux de cisaillement sont respectivement appelées viscosité à cisaillement nul, μ_0, et viscosité à cisaillement infini, μ_∞. Ainsi, la viscosité apparente d'un fluide rhéofluidifiant diminue de μ_0 à μ_∞ avec l'augmentation du taux de cisaillement. Les données couvrant une gamme suffisamment large de taux de cisaillement pour illustrer ce spectre complet de comportement pseudoplastique sont difficiles à obtenir et rares. Un seul instrument n'aura pas à la fois la sensibilité requise dans la région de faible taux de cisaillement et la robustesse à des taux de cisaillement élevés, de sorte que plusieurs instruments sont souvent nécessaires pour atteindre cet objectif.

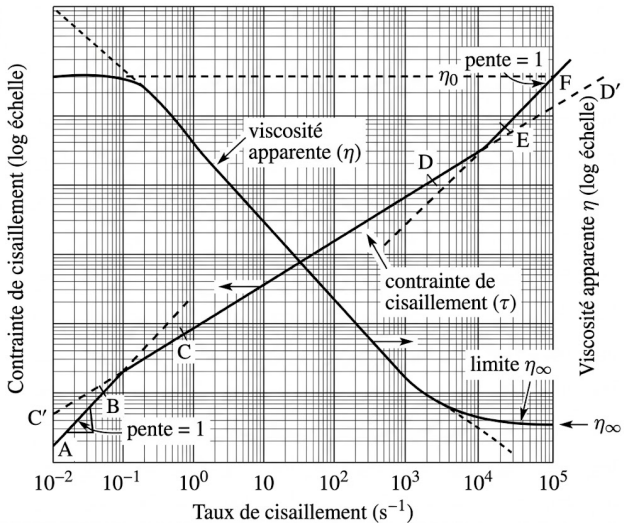


FIG. 3: Schéma représentant un comportement rhéofluidifiant

La Figure 4 montre le comportement viscosité apparente - taux de cisaillement d'une solution aqueuse de polyacrylamide à 293K sur près de sept décades de taux de cisaillement. La viscosité apparente de cette solution chute de $1400\ mPa \cdot s$ à $4.2\ mPa \cdot s$, il serait donc difficilement justifiable d'attribuer une seule valeur moyenne de viscosité pour un tel fluide ! Les valeurs des taux de cisaillement marquant le début des viscosités limites supérieure et inférieure dépendent de plusieurs facteurs, tels que le type et la concentration du polymère, sa distribution de poids moléculaire et la nature du solvant, etc. Il est donc difficile de suggérer des généralisations valides, mais de nombreux matériaux présentent leurs viscosités limites à des taux de cisaillement inférieurs à $10^{-2}s^{-1}$ et supérieurs à $10^{-2}s^{5}$, respectivement.

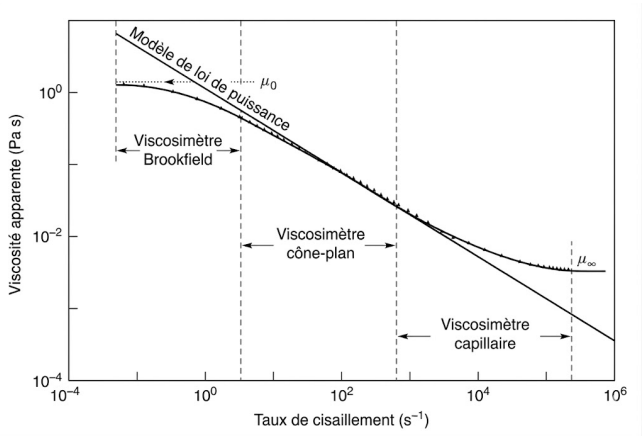


FIG. 4: Démonstration des viscosités en cisaillement nul et infini pour une solution polymère rhéofluidifiante [3]

En général, la plage de taux de cisaillement sur laquelle la viscosité apparente est constante (dans la région de cisaillement nul) augmente à mesure que le poids moléculaire du polymère diminue, que sa distribution de poids moléculaire devient plus étroite et que la concentration de polymère (en solution) diminue. De même, le taux de diminution de la viscosité apparente avec le taux de cisaillement varie également d'un matériau à l'autre, comme on peut le voir dans la Figure 5 pour trois solutions aqueuses de polymères chimiquement différents.

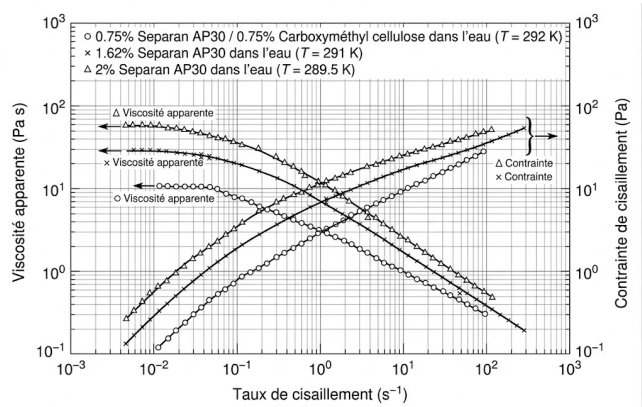


FIG. 5: Evolution de la contrainte de cisaillement et de la viscosité apparente en fonction du taux de cisaillement pour trois solutions polymères pseudoplastiques

4.3.1.2 Modèles mathématiques pour le comportement des fluides pseudoplastiques

De nombreuses expressions mathématiques de complexité et de forme variables ont été proposées dans la littérature pour modéliser les caractéristiques d'écoulement pseudo-plastique ; certaines sont des tentatives directes d'ajustement de courbe, donnant des relations empiriques pour les courbes contrainte de cisaillement (ou viscosité apparente)- taux de cisaillement par exemple, tandis que d'autres ont une base théorique dans la mécanique statistique – en tant qu'extension de l'application de la théorie cinétique à l'état liquide ou de la théorie des processus cinétiques, etc. Seule une sélection des modèles de viscosité les plus largement utilisés est donnée ici ; des descriptions plus complètes de ces modèles sont disponibles dans de nombreux ouvrages [4-6].

4.3.1.3 Modèle de loi puissance

Il est connu sous le nom de modèle d'Ostwald-de-Wael. La relation entre contrainte de cisaillement et taux de cisaillement (tracée sur des coordonnées double logarithmiques) pour un fluide pseudo-plastique peut souvent être approximée par une droite sur une plage limitée de taux de cisaillement (ou de contrainte). Pour cette partie de la courbe d'écoulement, une expression de la forme suivante est applicable :

$$\tau = k\dot{\gamma}^n \tag{4.17}$$

ainsi la viscosité apparente pour le fluide dite loi de puissance (ou Ostwald-de-Waele) est ainsi donnée par :

$$\mu = \frac{\tau}{\dot{\gamma}} = k\dot{\gamma}^{n-1} \tag{4.18}$$

- Pour $n < 1$, le fluide présente un comportement pseudo-plastique (rhéofluidifiant)
- pour $n = 1$, le fluide présente un comportement newtonien
- pour $n > 1$, le fluide présente un comportement dilatant (rhéoépaississant)

Dans ces équations, k et n sont deux paramètres empiriques d'ajustement de courbe et sont connus respectivement comme le coefficient de consistance du fluide et l'indice de structure du fluide. Pour un fluide pseudo-plastique, l'indice de structure peut avoir n'importe quelle valeur entre 0 et 1. Plus la valeur de n est petite, plus le degré de pseudoplasticité est important. Pour un fluide rhéoépaississant, l'indice n sera supérieur à l'unité. Lorsque $n = 1$, les équations (4.17) et (4.18) se réduisent à l'équation (4.8) qui décrit le comportement d'un fluide newtonien.

Bien que le modèle de loi de puissance offre la représentation la plus simple du comportement pseudo-plastique, il présente plusieurs inconvénients. En général, il s'applique uniquement sur une plage limitée de taux de cisaillement et donc les valeurs ajustées de k et n dépendront de la plage de taux de cisaillement considérée. De plus, il ne prédit pas les viscosités de cisaillement nulles et infinies, comme le montrent les lignes en pointillés dans la Figure 3. Enfin, il convient de noter que les dimensions du coefficient de consistance de l'écoulement, k, dépendent de la valeur numérique de n et par conséquent les valeurs de k ne doivent pas être comparées lorsque les valeurs de n diffèrent. D'autre part, la valeur de k peut être considérée comme la valeur de la viscosité apparente au taux de cisaillement unitaire et dépendra donc de l'unité de temps (par exemple, seconde, minute ou heure) utilisée. Malgré ces limitations, c'est peut-être le modèle le plus largement utilisé dans la littérature traitant des applications du génie des procédés.

4.3.1.4 Modèle de Carreau

Lorsqu'il y a des écarts significatifs par rapport au modèle de loi de puissance à des taux de cisaillement très élevés et très faibles, comme le montre la Figure 4, il est nécessaire d'utiliser un modèle qui tient compte des valeurs limites des viscosités μ_0 et μ_∞. En se basant sur les considérations du réseau moléculaire, Carreau (1972) [6] a proposé le modèle de viscosité suivant qui intègre à la fois les viscosités limites μ_0 et μ_∞ :

$$\frac{\mu - \mu_\infty}{\mu_0 - \mu_\infty} = \left[1 + (\lambda\dot{\gamma})^2\right]^{\frac{n-1}{2}} \tag{4.19}$$

où n (< 1) et λ sont deux paramètres d'ajustement de courbe. Ce modèle peut décrire un comportement pseudoplastique sur de larges plages de taux de cisaillement mais seulement au prix de la complexité ajoutée de quatre paramètres. Ce modèle prédit un comportement de fluide newtonien $\mu = \mu_0$ lorsque $n = 1$ ou $\lambda = 0$ ou les deux.

4.3.1.5 Modèle de Cross

Un autre modèle à quatre paramètres qui a été largement accepté proposé par Cross (1965) [7], qui s'écrit comme suit :

$$\frac{\mu - \mu_\infty}{\mu_0 - \mu_\infty} = \frac{1}{1 + k\dot{\gamma}^n} \tag{4.20}$$

Dans l'équation (4.20), n (< 1) et k sont deux paramètres d'ajustement tandis que μ_0 et μ_∞ sont les valeurs limites de la viscosité apparente à des taux de cisaillement faibles et élevés, respectivement. Ce modèle se réduit au comportement de fluide newtonien lorsque $k \to 0$. De même, lorsque $\mu \approx \mu_0$ et $\mu \approx \mu_\infty$, il se réduit au modèle de loi de puissance (4.18). Bien que Cross ait initialement suggéré qu'une valeur constante de $n = 2/3$ était adéquate pour approximer les données de viscosité pour de nombreux systèmes, on pense maintenant que le traitement de l'indice, n, comme un paramètre ajustable offre une amélioration considérable par rapport à l'utilisation de la valeur constante de n [8].

4.3.1.6 Modèle d'Ellis

Lorsque les écarts par rapport au modèle de loi de puissance sont significatifs uniquement à faibles taux de cisaillement, il est peut-être plus approprié d'utiliser le modèle d'Ellis. Les trois équations de viscosité présentées jusqu'à présent sont des exemples de la forme de l'équation (4.15). Le modèle d'Ellis à trois paramètres est une illustration de la forme inverse, à savoir l'équation (4.16). Dans le cisaillement simple, la viscosité apparente d'un fluide d'Ellis est donnée par :

$$\mu = \frac{\mu_0}{1 + \left(\frac{\tau}{\tau_{\frac{1}{2}}}\right)^{\alpha-1}} \tag{4.21}$$

Dans cette équation, μ_0 est la viscosité à cisaillement nul et les deux constantes restantes α (> 1) et $\tau_{\frac{1}{2}}$ sont des paramètres ajustables. Alors que l'indice α est une mesure du degré de comportement pseudoplastique (plus la valeur de α est grande, plus l'étendue de la pseudo-plasticité est grande), $\tau_{\frac{1}{2}}$ représente la valeur de la contrainte de cisaillement à laquelle la viscosité apparente a diminué de moitié par rapport à sa valeur à cisaillement nul. L'équation (4.21) prédit le comportement d'un fluide newtonien dans la limite de $\tau_{\frac{1}{2}} \to \infty$. Cette forme d'équation présente des avantages en permettant le calcul facile des profils de vitesse à partir d'une distribution de contrainte connue, mais rend l'opération inverse fastidieuse et lourde. Il est facile de voir que dans la plage intermédiaire de contrainte de cisaillement (ou de taux de cisaillement), $\left(\frac{\tau}{\tau_{\frac{1}{2}}}\right)^{\alpha-1} \gg 1$, et l'équation (4.21) se réduit à l'équation (4.18) avec $n = 1/\alpha$ et $k = \left(\mu_0 \tau_{\frac{1}{2}}^{\alpha-1}\right)^{1/\alpha}$.

4.3.2 Comportement viscoplastique

Ce type de comportement des fluides se caractérise par l'existence d'une contrainte seuil τ_c qui doit être dépassée pour que le fluide s'écoule ou se déforme. En revanche, un tel matériau se déformera élastiquement (ou s'écoulera en masse comme un corps rigide) lorsque la contrainte appliquée de l'extérieur est inférieure à la contrainte seuil. Une fois que l'amplitude de la contrainte externe a dépassé la valeur de la contrainte seuil, la courbe d'écoulement peut être linéaire ou non linéaire mais ne passera pas par l'origine (Figure 2). Par conséquent, en l'absence d'effets de tension superficielle, un tel matériau ne s'aplatira pas sous l'effet de la gravité pour former une surface libre absolument plate. Cependant, on peut expliquer ce type de comportement des fluides en postulant que la substance au repos est constituée de structures tridimensionnelles suffisamment rigides pour résister à toute contrainte externe inférieure à τ_c. Pour des niveaux de contrainte supérieurs à τ_c, cependant, la structure se brise et la substance se comporte comme un matériau visqueux. Dans certains cas, la formation et la rupture de la structure se sont révélées réversibles, c'est-à-dire que la substance peut retrouver sa valeur initiale de la contrainte seuil.

Un fluide avec une courbe d'écoulement linéaire pour $\tau > \tau_c$ est appelé fluide plastique de Bingham et se caractérise par une viscosité plastique constante μ_p (la pente de la courbe $\tau = f(\dot{\gamma})$) et une contrainte seuil τ_c. En revanche, une substance possédant une contrainte seuil ainsi qu'une courbe d'écoulement non linéaire en échelle linéaire (pour $\tau > \tau_c$), est appelée matériau 'pseudo-plastique à contrainte seuil'. La Figure 6 illustre le comportement viscoplastique tel qu'observé dans un extrait de viande et dans une solution de polymère.

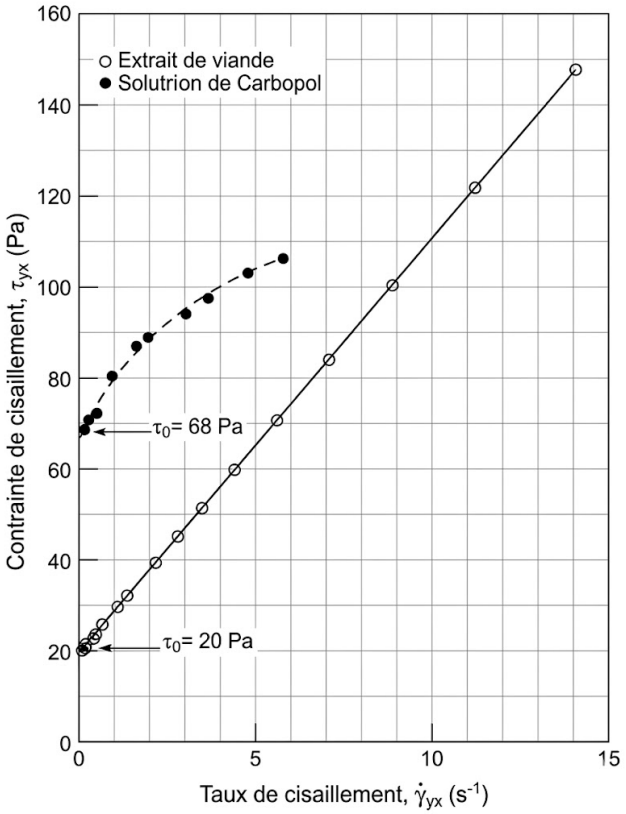


FIG. 6: Données représentatives de $\tau = f(\dot{\gamma})$ montrant le comportement viscoplastique dans un extrait de viande (plastique de Bingham) et dans une solution aqueuse de polymère de Carbopol (pseudo-plastique à contrainte seuil)

Il est intéressant de noter qu'un matériau viscoplastique présente également une viscosité apparente qui diminue avec l'augmentation du taux de cisaillement. À des taux de cisaillement très faibles, la viscosité apparente est effectivement infinie à l'instant juste avant que la substance commence à s'écouler. Il est donc possible de considérer ces matériaux comme une classe particulière de comportement pseudo-plastique.

Il est pratiquement impossible de déterminer si un matériau réel possède ou non une véritable contrainte seuil, mais néanmoins le concept d'une contrainte seuil s'est révélé pratique expérimentalement car certains matériaux se rapprochent étroitement de ce type de comportement, voir par exemple [9-12]. De nombreux chercheurs dans ce domaine considèrent la contrainte seuil en termes de transition d'un état semblable à un solide (à haute viscosité) à un état semblable à un liquide (à basse viscosité) qui se produit brusquement sur une plage extrêmement étroite de taux de cisaillement ou de contrainte de cisaillement [13]. Il n'est pas rare que les deux valeurs de viscosité diffèrent l'une de l'autre de plusieurs ordres de grandeur. La réponse à la question de savoir si un fluide possède ou non une contrainte seuil semble être liée au choix d'une échelle de temps d'observation. Des exemples courants de comportement des fluides viscoplastiques incluent les suspensions de particules, les émulsions, les produits alimentaires, le sang et les boues de forage, etc. [14].

4.3.2.1 Modèles mathématique du comportement viscoplastique

Au fil des ans, de nombreuses expressions empiriques ont été proposées à la suite d'exercices simples d'ajustement de courbe. Un modèle basé sur une théorie solide est encore à émerger. Trois modèles couramment utilisés pour les fluides viscoplastiques sont brièvement décrits ici.

4.3.2.2 Modèle de Bingham

Il s'agit de l'équation la plus simple décrivant le comportement d'écoulement d'un fluide avec une contrainte seuil et, en cisaillement unidimensionnel stationnaire, elle est écrite comme suit :

$$\begin{aligned} \tau &= \tau_c + \mu_p \dot{\gamma} \quad \text{pour} \quad \tau > \tau_c \\ \dot{\gamma} &= 0 \qquad\qquad \text{pour} \quad \tau < \tau_c \end{aligned} \tag{4.22}$$

Souvent, les deux paramètres du modèle, τ_c et μ_p, sont traités comme des constantes d'ajustement de courbe indépendamment de savoir si le fluide possède ou non une véritable contrainte seuil.

4.3.2.3 Modèle de Herschel-Bulkley

Une généralisation simple du modèle de Bingham plastique pour englober la courbe d'écoulement non linéaire (pour $\tau > \tau_c$) est le modèle de Herschel-Bulkley à trois paramètres. En mouvement de cisaillement unidimensionnel stationnaire, il est écrit comme suit :

$$\begin{aligned} \tau &= \tau_c + k\dot{\gamma}^n \quad \text{pour} \quad \tau > \tau_c \\ \dot{\gamma} &= 0 \qquad\qquad \text{pour} \quad \tau < \tau_c \end{aligned} \tag{4.23}$$

Notez également que ici aussi, les dimensions de m dépendent de la valeur de n. La signification physique de k et n (< 1) dans l'équation (4.23) est similaire à celle dans l'équation (4.17). Avec l'utilisation du troisième paramètre, ce modèle offre un ajustement quelque peu meilleur à certaines données expérimentales.

4.3.2.4 Modèle de Casson

De nombreux produits alimentaires et matériaux biologiques, en particulier le sang, sont bien décrits par ce modèle à deux constantes comme suit :

$$\begin{aligned} \sqrt{\tau} &= \sqrt{\tau_c} + \sqrt{\mu_c \dot{\gamma}} \quad \text{pour} \quad \tau > \tau_c \\ \dot{\gamma} &= 0 \qquad\qquad\quad \text{pour} \quad \tau < \tau_c \end{aligned} \tag{4.24}$$

Ce modèle a souvent été utilisé pour décrire le comportement du sang, du yogourt, du chocolat fondu, etc. Le comportement de certaines suspensions de particules se rapproche également étroitement de ce type de comportement. La performance comparative de ces trois modèles ainsi que de plusieurs autres pour le comportement viscoplastique a été soigneusement évaluée dans un article de synthèse approfondi par Bird [15] et une discussion détaillée sur l'existence, la mesure et les implications de la contrainte de seuil a été fournie par Barnes [14].

4.3.3 Variation du comportement avec le temps

Le comportement rhéologique de nombreux matériaux industriels importants ne peut pas être décrit par une équation rhéologique simple comme (4.17) ou (4.18). En pratique, les viscosités apparentes peuvent dépendre non seulement du taux de cisaillement mais aussi du temps pendant lequel le fluide a été soumis au cisaillement. Par exemple, lorsque des matériaux tels que des suspensions d'eau-bentonite, des suspensions de boue rouge (flux de déchets de l'industrie de l'aluminium), de la pâte de ciment, des huiles brutes et certains produits alimentaires sont soumis à un cisaillement à un taux constant après une longue période

de repos, leurs viscosités apparentes diminuent progressivement à mesure que la structure "interne" du matériau est progressivement détruite. À mesure que le nombre de "liaisons" structurelles capables d'être rompues diminue, le taux de changement de la viscosité apparente avec le temps diminue progressivement jusqu'à zéro. À l'inverse, au fur et à mesure que la structure se dégrade, le taux auquel les liaisons peuvent se reformer augmente, de sorte qu'un état d'équilibre dynamique est finalement atteint lorsque les taux de formation et de rupture sont équilibrés. Le comportement du fluide dépendant du temps peut être subdivisé en deux catégories supplémentaires : la thixotropie et la rhéopexie (thixotropie négative).

4.3.3.1 Thixotropie

Un matériau est dit thixotrope si, lorsqu'il est soumis à un taux de cisaillement constant, sa viscosité apparente (ou la contrainte de cisaillement correspondante) diminue avec le temps de cisaillement, comme on peut le voir sur la Figure 7 pour une suspension de boue rouge [16].

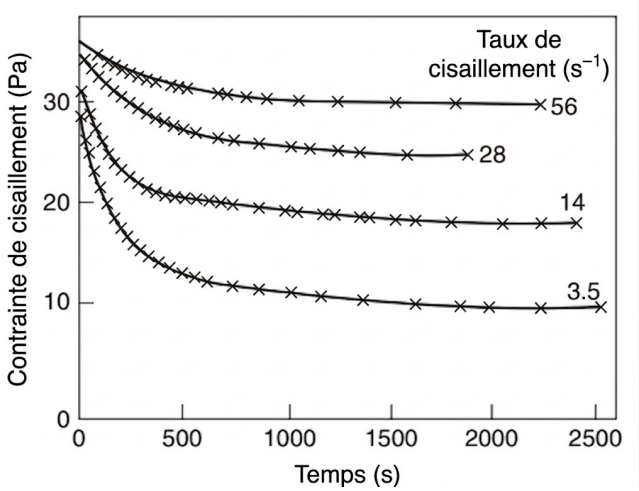


FIG. 7: Des données représentatives démontrant la thixotropie dans une suspension de boue rouge à 59% (en poids).

Si la courbe d'écoulement est mesurée dans une seule expérience où le taux de cisaillement est augmenté de manière constante à un rythme constant de zéro à une valeur maximale, puis diminué au même rythme jusqu'à zéro à nouveau, une boucle d'hystérésis de la forme présentée dans la Figure 8 est obtenue ; la hauteur, la forme et la surface de la boucle d'hystérésis dépendent de la durée du cisaillement, du taux d'augmentation/diminution du taux de cisaillement et de l'historique cinématique passé de l'échantillon. En gros, plus la surface fermée est grande, plus le comportement dépendant du temps des matériaux est fort.

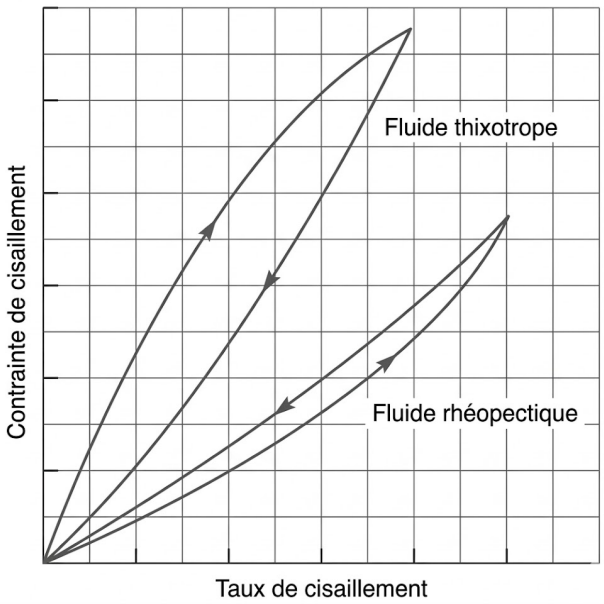


FIG. 8: Schéma d'une courbe $\tau = f(\dot{\gamma})$ pour un comportement rhéologique dépendant du temps

Ainsi, aucune boucle d'hystérésis n'est observée pour les fluides indépendants du temps, c'est-à-dire que la surface fermée de la boucle est nulle. La Figure 9 montre la boucle d'hystérésis pour une pâte de ciment.

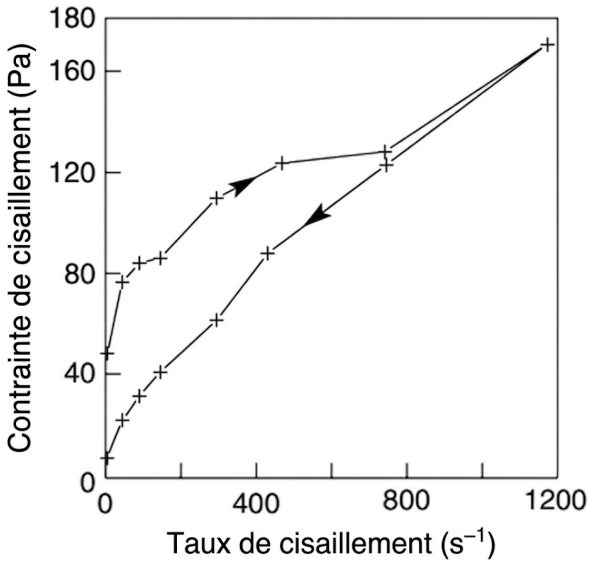


FIG. 9: Comportement thixotrope d'une pâte de ciment [17]

D'autres exemples de matériaux présentant un comportement thixotropique comprennent les suspensions concentrées, les suspensions d'argile de laponite et de bentonite, les émulsions, les fluides de forage, les pétroles bruts cireux, les solutions protéiques et les produits alimentaires, etc. [18].

4.3.4 Comportement viscoélastique

Dans la théorie classique de l'élasticité, la contrainte dans un corps soumis à un cisaillement est directement proportionnel à la déformation. Pour la tension, la loi de Hooke s'applique et le coefficient de

proportionnalité est connu sous le nom de module de Young, G :

$$\tau = -G\frac{dx}{dy} = G \cdot \gamma_{yx} \tag{4.25}$$

où dx est le déplacement de cisaillement de deux éléments séparés par une distance dy. Lorsqu'un solide parfait est déformé élastiquement, il retrouve sa forme d'origine lors du retrait de la contrainte. Cependant, si la contrainte appliqué dépasse la contrainte caractéristique de limite élastique du matériau, une récupération complète ne se produira pas et un "fluage" se produira - c'est-à-dire que le "solide" sera déformé.

À l'autre extrême, dans un fluide newtonien, la contrainte de cisaillement est proportionnel au taux de cisaillement, selon l'équation (4.8). De nombreux matériaux présentent à la fois des effets élastiques et visqueux dans des circonstances appropriées. En l'absence du comportement dépendant du temps mentionné dans la section précédente, le matériau est dit viscoélastique. La déformation parfaitement élastique et l'écoulement parfaitement visqueux sont, en effet, des cas limites du comportement viscoélastique. Pour certains matériaux, ce ne sont que ces conditions limites qui sont observées en pratique. L'élasticité de l'eau et la viscosité de la glace passent généralement inaperçues ! La réponse d'un matériau dépend non seulement de sa structure, mais aussi des conditions (cinématiques) auxquelles il a été soumis ; ainsi, la distinction entre "solide" et "fluide" et entre "élastique" et "visqueux" est en quelque sorte arbitraire et subjective. En d'autres termes, il n'est pas rare qu'un matériau se comporte comme un fluide visqueux dans une situation et comme un solide élastique dans une autre situation.

De nombreux matériaux d'intérêt pratique (tels que les polymères fondus, les solutions polymères et savonneuses, le liquide synovial) présentent un comportement viscoélastique ; ils ont une certaine capacité à stocker et à récupérer l'énergie de cisaillement.

4.3.4.1 Contraintes normales dans les écoulements de cisaillement stationnaires

Considérons le mouvement de cisaillement unidimensionnel d'un fluide ; les contraintes développées par le cisaillement d'un élément infinitésimal de fluide entre deux plans sont illustrées dans la Figure 10. En raison de la nature de l'écoulement de cisaillement stationnaire, les composantes de vitesse dans les directions$y$ et z sont nulles (c'est-à-dire, $V_y = 0$; $V_z = 0$) tandis que celle dans la direction x est une fonction de y uniquement, c'est-à-dire $V_x(y)$.

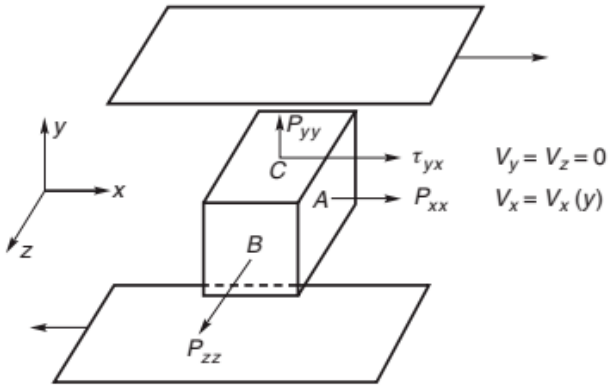


FIG. 10: Composantes de contrainte dans le mouvement de cisaillement unidimensionnel stationnaire d'un fluide viscoélastique

Notez qu'en plus de la contrainte de cisaillement, τ_{yx}, il y a trois contraintes normales désignées par σ_{xx}, σ_{yy} et σ_{zz} à l'intérieur du fluide cisaillé qui sont données par l'équation (4.2). Weissenberg (1947) [19]

a été le premier à observer que le mouvement de cisaillement d'un fluide viscoélastique donne lieu à des contraintes normales inégales. Comme la pression dans un fluide non newtonien ne peut pas être définie par l'équation (4.3), les différences, $\sigma_{xx} - \sigma_{yy} = N_1$ et $\sigma_{yy} - \sigma_{zz} = N_2$, sont plus facilement mesurées que les contraintes individuelles, et il est donc courant d'exprimer N_1 et N_2 ainsi que τ_{yx} en fonction du taux de cisaillement $\dot{\gamma}_{yx}$ pour décrire le comportement rhéologique d'un matériau viscoélastique dans un écoulement de cisaillement simple. Parfois, les premières et deuxièmes différences de contrainte normale N_1 et N_2 sont exprimées en termes de deux coefficients, ψ_1 et ψ_2, définis comme suit :

$$\psi_1 = \frac{N_1}{\dot{\gamma}_{yx}^2} \tag{4.26}$$

$$\psi_2 = \frac{N_2}{\dot{\gamma}_{yx}^2} \tag{4.27}$$

Une dépendance typique de la première différence de contrainte normale en fonction du taux de cisaillement est montrée dans la Figure 11 pour une série de solutions de polystyrène dans du toluène. Habituellement, le taux de décroissance de ψ_1 avec le taux de cisaillement est plus élevé que celui de la viscosité apparente. À très faibles taux de cisaillement, il est attendu que la première différence de contrainte normale, N_1, soit proportionnelle au carré du taux de cisaillement - c'est-à-dire que ψ_1 tende vers une valeur constante ψ_0 ; ce comportement limite est observé dans certaines données expérimentales de la Figure 11.

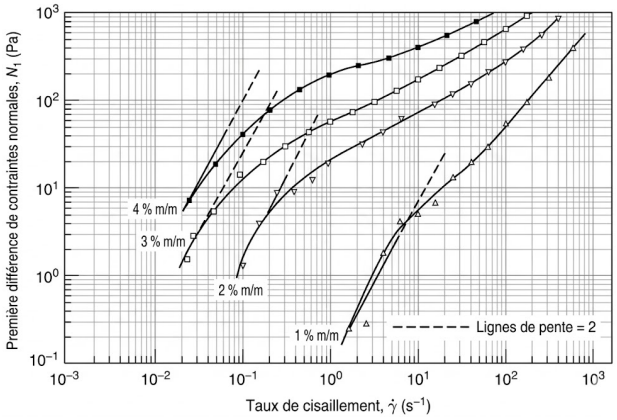


FIG. 11: Données représentatives de la première différence de contrainte normale pour les solutions de polystyrène-toluène à 298 K [20].

Il est courant que la première différence de contrainte normale N_1 soit plus élevée que la contrainte de cisaillement τ pour la même valeur de taux de cisaillement. Le rapport de N_1 à τ est souvent considéré comme une mesure de l'élasticité d'un liquide ; spécifiquement (N_1/τ) est utilisé et appelé le cisaillement récupérable. Des cisaillements récupérables supérieurs à 0.5 ne sont pas rares dans les solutions et les mélanges de polymères. Ils indiquent un comportement très élastique du fluide. Il n'y a cependant aucune preuve que ψ_1 tende vers une valeur limite à des taux de cisaillement élevés. Il est juste de mentionner ici que la première différence de contrainte normale a été beaucoup moins étudiée que la contrainte de cisaillement.

Même moins d'attention a été accordée à l'étude et à la mesure de la deuxième différence de contrainte normale. Les points les plus importants à noter à propos de N_2 sont qu'elle est d'un ordre de grandeur plus petite que N_1 et qu'elle est négative. Jusqu'à récemment, on pensait que N_2 était égal à zéro ; cette hypothèse dite de Weissenberg n'est plus considérée comme correcte. Certaines données dans la littérature semblent même suggérer que N_2 pourrait changer de signe. Les formes typiques de dépendance de N_2 par rapport au taux de cisaillement sont montrées dans la Figure 12 pour les mêmes solutions que celles utilisées dans la Figure 11.

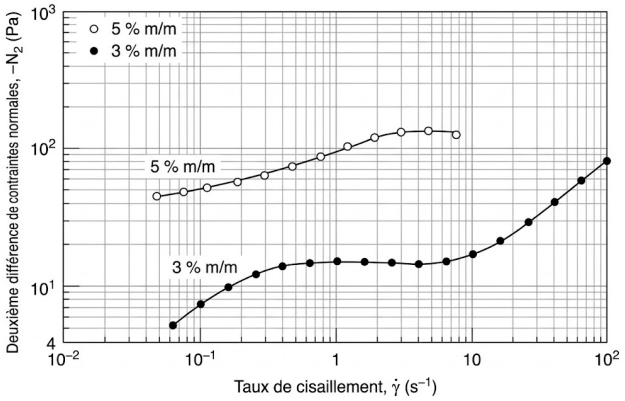


FIG. 12: Données représentatives de la deuxième différence de contrainte normale pour les solutions de polystyrène-toluène à 298 K [20].

Les deux différences de contrainte normale définies de cette manière sont caractéristiques d'un matériau et, en tant que telles, sont utilisées pour catégoriser un fluide soit comme purement visqueux ($N_1 \leq 0$), soit comme viscoélastique. La magnitude de N_1 par rapport à τ_{yx} est souvent utilisée comme mesure de la viscoélasticité.

4.3.4.2 Écoulement élongationnal

Les écoulements qui résultent en fluides étant soumis à l'étirement dans une ou plusieurs directions se produisent dans de nombreux processus, le filage de fibres et le soufflage de films polymères étant seulement deux des exemples les plus courants. Encore une fois, lorsque deux bulles se coalescent, un étirement très similaire du film liquide entre elles se produit jusqu'à ce que la rupture se produise. Un autre exemple important de l'occurrence d'effets d'extension est l'écoulement de solutions polymères dans des milieux poreux, comme rencontré dans le processus de récupération assistée du pétrole, dans lequel le fluide est étiré à mesure que l'étendue et la forme des passages d'écoulement changent. Il existe trois formes principales d'écoulement élongationnel : uniaxial, biaxial et planaire, comme illustré dans la Figure 13.

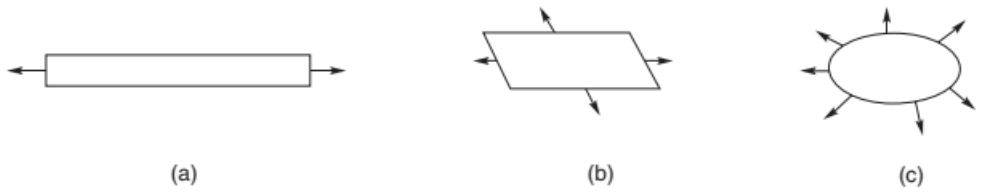


FIG. 13: Représentation de l'extension uniaxiale (a), biaxiale (b) et plane (c).

Le filage de fibres est un exemple d'extension uniaxiale (mais le taux d'étirement varie d'un point à un autre le long de la fibre). Le soufflage de film tubulaire, qui implique l'extrusion de polymère à travers une filière fendue et la traction de la feuille émergente vers l'avant et sur les côtés, est un exemple d'extension biaxiale ; ici, les taux d'étirement dans les deux directions peuvent normalement être spécifiés et contrôlés. Un autre exemple est la fabrication de tubes en plastique qui peuvent être fabriqués soit par extrusion soit par moulage par injection, suivi par le chauffage et la soumission à de l'air sous haute pression pour le soufflage à la taille désirée. En raison de la symétrie, l'étape de soufflage est un exemple d'extension biaxiale avec des taux d'étirement égaux dans deux directions. Indépendamment du type d'extension, la somme des

taux volumiques d'extension dans les trois directions doit toujours être nulle pour un fluide incompressible.

Naturellement, le mode d'extension affecte la manière dont le fluide résiste à la déformation, et bien que cette résistance puisse être qualifiée de manière approximative en termes de viscosité élongationnelle (qui dépend davantage du type d'écoulement élongationnel, c'est-à-dire uniaxial, biaxial ou planaire), ce paramètre n'est en général pas nécessairement constant. Pour simplifier, on peut considérer le comportement d'un élément de fluide incompressible qui est étiré à un taux constant $\dot{\epsilon}$ dans la direction x, comme illustré dans la Figure 14.

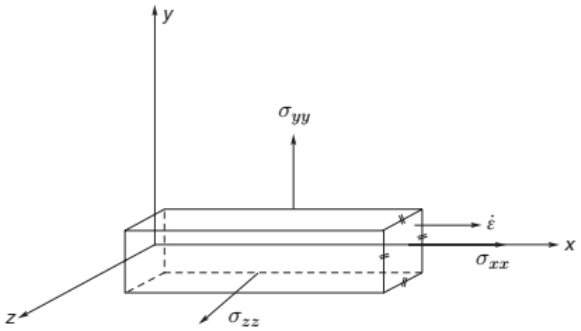


FIG. 14: Écoulement élongationnel uniaxial

Pour un fluide incompressible, le volume de l'élément doit rester constant et donc il doit se contracter dans les directions y et z à un taux de $(\dot{\epsilon}/2)$, si le système est symétrique dans ces directions. Les contraintes normales σ_{yy} et σ_{zz} seront alors égales. Dans ces conditions, les trois composantes du vecteur vitesse $\vec{V}$ sont données par :

$$\begin{aligned} V_x &= \dot{\epsilon}x \\ V_y &= -\frac{\dot{\epsilon}}{2}y \\ V_z &= -\frac{\dot{\epsilon}}{2}z \end{aligned} \tag{4.28}$$

et clairement, le taux d'allongement dans la direction x est donné par :

$$\dot{\epsilon} = \frac{\partial V_x}{\partial x} \tag{4.29}$$

Dans l'extension uniaxiale, la viscosité élongationnelle μ_E est alors définie comme suit :

$$\mu_E = \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{\dot{\epsilon}} = \frac{\tau_{xx} - \tau_{yy}}{\dot{\epsilon}} \tag{4.30}$$

Les premières déterminations de la viscosité élongationnelle ont été réalisées pour le cas le plus simple de l'extension uniaxiale, l'étirement d'une fibre ou d'un filament de liquide. Trouton (1906) [21] et de nombreux autres chercheurs ultérieurs ont constaté que, à faible taux de déformation (ou d'allongement), la viscosité élongationnelle μ_E était trois fois la viscosité en cisaillement μ [8]. Le rapport μ_E/μ est appelé le rapport de Trouton, T_r et ainsi :

$$T_r = \frac{\mu_E}{\mu} \tag{4.31}$$

La valeur de 3 pour le rapport de Trouton pour un fluide newtonien incompressible s'applique à toutes les valeurs de taux de cisaillement et d'élongation. Par analogie, on peut définir le rapport de Trouton pour un fluide non newtonien :

$$T_r = \frac{\mu_E(\dot{\gamma})}{\mu(\dot{\gamma})} \tag{4.32}$$

La définition du rapport de Trouton donnée par l'équation (4.32) est quelque peu ambiguë, car elle dépend à la fois de $\dot{\epsilon}$ et de $\dot{\gamma}$, et une certaine convention doit donc être adoptée pour relier les taux de déformation en extension et en cisaillement. Pour éliminer cette ambiguïté et en même temps fournir une estimation pratique du comportement en extension, Jones et al. (1987) ont proposé la définition suivante du rapport de Trouton :

$$T_r = \frac{\mu_E(\dot{\epsilon})}{\mu(\sqrt{3}\dot{\epsilon})} \tag{4.33}$$

c'est-à-dire, dans le dénominateur, la viscosité en cisaillement est évaluée à $\dot{\gamma} = \sqrt{3}\dot{\epsilon}$. Ils ont également suggéré que pour les fluides inélastiques isotropes, le rapport de Trouton est égal à 3 pour toutes les valeurs de $\dot{\epsilon}$ et de $\dot{\gamma}$, et tout écart par rapport à la valeur de 3 peut être attribué de manière non ambiguë à la viscoélasticité. En d'autres termes, l'équation (4.33) implique que pour un fluide pseudoplastique inélastique, la viscosité élongationnelle doit également diminuer avec l'augmentation du taux d'extension. De toute évidence, un fluide viscoélastique pseudoplastique (pour lequel le rapport de Trouton sera supérieur à 3, atteignant souvent jusqu'à 103) aura ainsi une viscosité élongationnelle qui augmente avec le taux d'extension ; cette propriété est également appelée "écrouissage".

De nombreux matériaux, y compris les polymères fondus et les solutions, présentent ainsi une pseudoplasticité dans le cisaillement simple et un écrouissage dans l'extension uniaxiale. Sauf dans la limite des taux de déformation infinitésimaux, il ne semble pas y avoir de relation simple entre la viscosité élongationnelle et les autres propriétés rhéologiques du fluide et, à ce jour, sa détermination repose entièrement sur des expériences qui sont souvent limitées par la difficulté d'établir et de maintenir un champ d'écoulement en extension suffisamment longtemps pour atteindre l'état stationnaire [22, 23]. Les mesures effectuées sur le même fluide à l'aide de différentes méthodes montrent rarement un accord quantitatif, en particulier pour les fluides de faible à moyenne viscosité [24]. Les rapports de Trouton pour les extensions biaxiales et planes à faibles taux de déformation ont des valeurs de 6 et 9, respectivement, pour tous les fluides inélastiques et pour les fluides newtoniens dans toutes les conditions.

4.3.4.3 Modèles mathématiques pour le comportement viscoélastique

Bien que les résultats des expériences en cisaillement permanent et transitoire ou dans un champ d'écoulement élongationnel puissent être utilisés pour calculer les propriétés visqueuses et élastiques d'un fluide, en général, les équations mathématiques doivent être assez complexes pour décrire adéquatement un fluide réel. Certainement, la caractéristique la plus frappante associée à la déformation d'une substance visco-élastique est son affichage simultané de caractéristiques "liquides" et "solides". Il n'est donc pas du tout surprenant que les premières tentatives de description quantitative du comportement visco-élastique reposaient sur la notion d'une combinaison linéaire de propriétés élastiques et visqueuses en utilisant des analogues mécaniques impliquant des ressorts (composante élastique) et des amortisseurs (action visqueuse). Le modèle de Maxwell représente la brique élémentaire des modèles visco-élastiques linéaires ; bien qu'il soit rudimentaire, il capture néanmoins les caractéristiques essentielles du comportement visco-élastique, au moins qualitativement.

Un analogue mécanique de ce modèle est obtenu par des combinaisons en série d'un ressort et d'un amortisseur, comme le montre la Figure 15.

Si les taux de déformation individuels du ressort et de l'amortisseur, respectivement, sont $\dot{\gamma}_1$ et $\dot{\gamma}_2$, alors le taux de déformation total $\dot{\gamma}$ est donné par la somme de ces deux composantes :

$$\dot{\gamma} = \dot{\gamma}_1 + \dot{\gamma}_2 \tag{4.34}$$

En combinant l'équation (4.34) avec la loi de Hooke de l'élasticité, équation (4.25), et la loi de Newton de

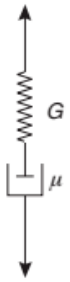


FIG. 15: Représentation du modèle de Maxwell

la viscosité, on peut obtenir :

$$\tau + \lambda\dot{\tau} = \mu\dot{\gamma} \tag{4.35}$$

où $\dot{\tau}$ est la dérivée temporelle de τ ; μ est la viscosité du fluide de l'amortisseur et $\lambda = \mu/G$ est le temps de relaxation, qui est une caractéristique du fluide. Afin d'illustrer le comportement d'un fluide de Maxwell, la plus simple expérience que l'on puisse réaliser est d'appliquer instantanément une petite déformation (saut de déformation) qui est maintenue à un niveau constant. Pour une substance élastique idéale (ressort), la contrainte suivra la déformation et atteindra une valeur constante conformément à la loi de Hooke de l'élasticité, c'est-à-dire $\tau = G\gamma$. Dans le modèle de Maxwell, le ressort répondra donc instantanément dans une telle expérience de saut de déformation.

D'autre part, le piston se déplacera lentement à travers l'amortisseur et donc, la contrainte dans le ressort diminuera progressivement avec le temps. Pour une valeur constante de γ, le taux de changement de déformation est nul, c'est-à-dire $\dot{\gamma} = 0$. L'équation (4.35) se réduit donc à :

$$\tau + \lambda\dot{\tau} = 0 \tag{4.36}$$

L'intégration par rapport au temps, avec la condition initiale à $t = 0$, $\tau = \tau_m$ (où τ_m est la valeur maximale de la contrainte), conduit à :

$$\tau = \tau_m e^{-\frac{\lambda}{t}} \tag{4.37}$$

Cette équation décrit la décroissance de la contrainte dans le temps lorsqu'une déformation rapide est appliquée (et maintenue ensuite à cette valeur) à un fluide de Maxwell (Figure 16). Ceci est similaire à une réaction chimique du premier ordre dans laquelle la concentration du réactif diminue de manière exponentielle conformément à l'équation (4.37).

Dans les premières étapes ($t \to 0$) de l'expérience de saut de déformation, le terme exponentiel et/λ tend vers un et la réponse est simplement celle du ressort, c'est-à-dire d'un fluide élastique. Lorsque t est de l'ordre de λ, la contrainte a diminué de sa valeur maximale τ_m à τ_m/e. Ainsi, la valeur de λ dicte le taux de relaxation de contrainte. Inversement, de tels tests simples peuvent être utilisés pour évaluer les constantes matérielles telles que le module de cisaillement (G) et le temps de relaxation (λ). Par exemple, comme noté ci-dessus, pour de petites valeurs de t, la réponse d'un fluide de Maxwell dans un test de saut de déformation est celle du ressort, et donc la valeur initiale de contrainte (τ_m) divisée par la déformation donne la valeur du module de cisaillement (contrainte divisée par déformation) du ressort. De même, la valeur du temps de relaxation, λ, peut être extraite d'une courbe contrainte-temps.

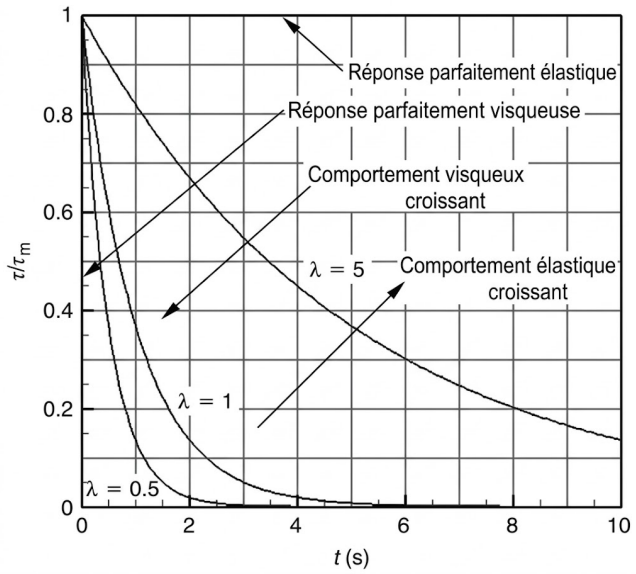


FIG. 16: Comportement de décroissance de la contrainte d'un fluide de Maxwell dans une expérience de saut de déformation.

4.4 Rhéomètrie

4.4.1 Rhéométrie en cisaillement : écoulements entraînés

La caractérisation rhéologique en cisaillement joue un rôle essentiel dans l'analyse du comportement des matériaux fluides, notamment lorsqu'il s'agit de déterminer leurs propriétés d'écoulement et leurs réponses viscoélastiques sous sollicitation mécanique. En pratique, la déformation en cisaillement peut être imposée suivant différents principes expérimentaux, ce qui conduit à distinguer deux grandes familles de rhéomètres :

- les **écoulements entraînés** (*drag flows*), comme dans l'appareil de Couette, où le cisaillement est produit entre une surface mobile et une surface fixe ;
- les **écoulements sous pression** (*pressure-driven flows*), où le cisaillement résulte d'un gradient de pression à l'intérieur d'un conduit fermé.

Ces dispositifs permettent de mesurer plusieurs fonctions caractéristiques du comportement rhéologique des matériaux. *Module de relaxation*

$$G(t) = \frac{\tau_{12}(t)}{\gamma_0} \tag{4.38}$$

Les fonctions viscoélastiques linéaires associées incluent également $G^*(\omega)$, $J(t)$ et $\eta^+(t)$.
Viscosité transitoire en cisaillement

$$\eta^+(t,\dot{\gamma}) = \frac{\tau_{12}(t,\dot{\gamma})}{\dot{\gamma}} \tag{4.39}$$

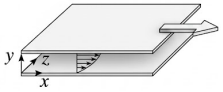
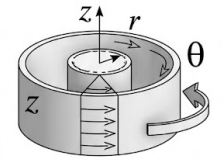
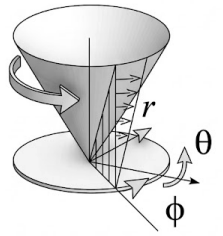
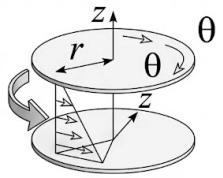
Lorsque le temps devient suffisamment long, cette grandeur tend vers la viscosité stationnaire :

$$\eta(\dot{\gamma}) = \frac{\tau_{12}(\dot{\gamma})}{\dot{\gamma}} \tag{4.40}$$

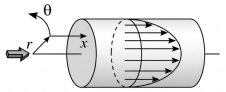
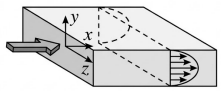
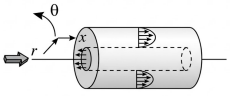
Les sections suivantes exposent les équations fondamentales de fonctionnement propres à chacun de ces rhéomètres. Ces relations permettent d'exprimer les fonctions rhéologiques en fonction des dimensions géométriques de l'appareil, des mouvements mesurés et des forces appliquées. Les démonstrations corres-

pondantes sont également fournies, accompagnées d'une analyse des principales sources d'erreur ainsi que de remarques sur les conditions dans lesquelles chaque rhéomètre présente le meilleur domaine d'application.

TAB. 1: Écoulements par entraînement (Drag Flows)

Géométrie	**Schéma**	x_1	x_2	x_3
Plaques glissantes		x	y	z
Cylindres concentriques (écoulement de Couette)		θ	r	z
Cône et plateau		ϕ	θ	r
Disques parallèles (écoulement torsionnel)		θ	z	r

TAB. 2: Écoulements par pression (Pressure Flows)

Géométrie	**Schéma**	x_1	x_2	x_3
Capillaire (écoulement de Poiseuille)		x	r	θ
Écoulement en fente		x	y	z
Écoulement annulaire axial		x	r	θ

Les équations de déformation en cisaillement et de distribution des déformations sont également établies. Elles s'avèrent indispensables pour décrire les fonctions matérielles en régime de petites déformations viscoélastiques linéaires, telles que $G(t)$, $G^*(\omega)$ et $J(t)$, ainsi que pour les fonctions matérielles en régime de grandes déformations, telles que $G(t,\gamma)$, $\eta^+(\dot{\gamma},t)$ et $J(t,\gamma)$. Les difficultés expérimentales inhérentes à ces mesures dépendantes du temps — notamment l'inertie des transducteurs, la compliance des instruments et le traitement par corrélation croisée des signaux — sont soigneusement examinées, de même que les critères de conception instrumentale garantissant la précision des rhéomètres à écoulement par glissement.

4.4.1.1 Plaques Glissantes, Bille en Chute

La méthode la plus simple pour générer un cisaillement simple stationnaire consiste à placer un matériau entre une grande plaque fixe et une plaque mobile à vitesse constante, comme illustré à la Figure 17. Lorsque les effets inertiels et de bord sont négligeables, l'écoulement est homogène et les équations du mouvement sont identiquement satisfaites. La déformation, le taux de déformation et la contrainte de cisaillement s'écrivent respectivement :

$$B_{xy} = B_{12} = \gamma = \frac{\Delta x}{h} = \frac{v_0 t}{h} \tag{4.41}$$

$$2D_{xy} = 2D_{12} = \dot{\gamma} = \frac{v_0}{h} \tag{4.42}$$

$$T_{xy} = T_{12} = \frac{f_x}{LW} \tag{4.43}$$

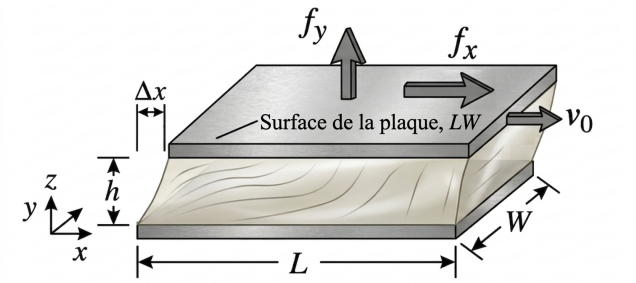


FIG. 17: Schéma du rhéomètre à plaques glissantes. Le déplacement est donné par $\Delta x = v_0 t$. L et W désignent respectivement la longueur et la largeur de la plaque, h l'entrefer, f_x la force de cisaillement et f_y la force normale.

À des temps très courts ou à haute fréquence d'oscillation, les effets inertiels ne peuvent être négligés, en particulier lors de l'essai d'échantillons de faible viscosité. Le profil de vitesse nécessite un temps fini pour se développer. Le critère de Schrag (1977) pour le temps d'établissement d'un écoulement de cisaillement simple homogène est :

$$t_c \sim \frac{1}{w_c} = \frac{10\rho h^2}{\eta} \tag{4.44}$$

Ce critère s'applique aux autres écoulements par entraînement à entrefer étroit. Il faut environ $0{,}1\,\mathrm{s}$ pour que l'onde de contrainte de cisaillement se propage à travers l'entrefer.

En principe, à partir de la poussée totale f_y ou de mesures de pression, il serait possible de déterminer T_{22}, bien que cela n'ait pas été rapporté dans la littérature. Le principal problème pratique de cette géométrie réside dans les effets de bord. Pour les solides, dès lors que L et W sont très supérieurs à h, un flambement peut survenir. Il est en effet très difficile de maintenir les deux plaques parallèles pour des déformations importantes ou des forces normales élevées. Pour les liquides, l'échantillon doit être suffisamment visqueux pour ne pas s'écouler hors de l'entrefer ; cependant, s'il est trop visqueux, des phénomènes de flambement et de déchirement peuvent apparaître. Par ailleurs, atteindre un cisaillement stationnaire constitue une difficulté supplémentaire : à mesure que la déformation augmente, les effets de bord s'aggravent. C'est pourquoi la plupart des mesures rhéologiques en cisaillement sont réalisées avec des géométries rotatives à

lignes de courant fermées.

Plusieurs études ont eu recours aux plaques glissantes. Van Wazer et al. (1963, p. 302) [25] décrivent un dispositif destiné à l'étude des asphaltes, utilisant la géométrie de plaques glissantes. La plupart des rhéomètres à plaques glissantes emploient cependant un double échantillon, ce qui permet d'éviter le gauchissement et d'éliminer les effets de contraintes normales. Une géométrie sandwich de cisaillement, utilisable dans une machine de traction standard pour les solides, est présentée à la Figure 18. L'échantillon peut être usiné à partir d'un grand bloc avec une section d'essai mince de chaque côté et une section épaisse destinée à l'application de la force [26]. Des échantillons en caoutchouc peuvent être collés à un bloc métallique à l'aide d'adhésifs [27]. Des rhéomètres à plaques glissantes et à cylindres glissants ont également été développés pour l'étude des polymères fondus [28-32].

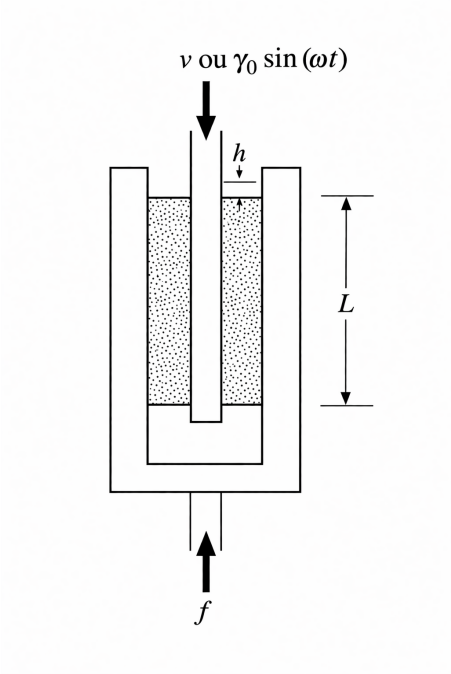


FIG. 18: Dispositif sandwich de cisaillement pour polymères fondus, adhésifs ou caoutchoucs. La vitesse imposée est v ou $\gamma_0 \sin(\omega t)$, h désigne l'épaisseur de l'échantillon et L la longueur de la zone de cisaillement.

Un concept similaire a été utilisé comme rhéomètre à cisaillement élevé pour les encres d'imprimerie [25]. Dans ce dispositif, un film mince et large est tiré à travers un entrefer étroit rempli de fluide. L'écoulement maintient le film centré et la vitesse est déterminée à partir de marques temporelles inscrites sur le film.

4.4.1.2 Cylindre en Chute

Pour atténuer les effets de bord inhérents à la géométrie des plaques glissantes, un cylindre peut être glissé à l'intérieur d'un tube. Lorsque les deux extrémités sont ouvertes et que l'entrefer est suffisamment petit, on obtient un cisaillement simple, comme illustré à la Figure 19(a). Sivashinsky et al. (1984) [31] ont utilisé cette géométrie pour les polymères fondus, obtenant des résultats très similaires à ceux issus des études en géométrie sandwich. Comme pour cette dernière, une viscosité élevée et la tension de surface maintiennent l'échantillon dans l'entrefer.

Lorsqu'un cylindre est lâché dans un tube fermé, le fluide déplacé doit refluer, ce qui génère le profil de vitesse représenté à la Figure 19(b). La méthode la plus couramment utilisée est cependant celle du

cas opposé : une aiguille de faible diamètre est lâchée dans un grand cylindre contenant le fluide à tester. Après une distance de chute suffisante pour atteindre le régime stationnaire, la vitesse terminale v_∞ est déterminée par chronométrage entre deux repères. Cette technique est généralement limitée aux fluides transparents.

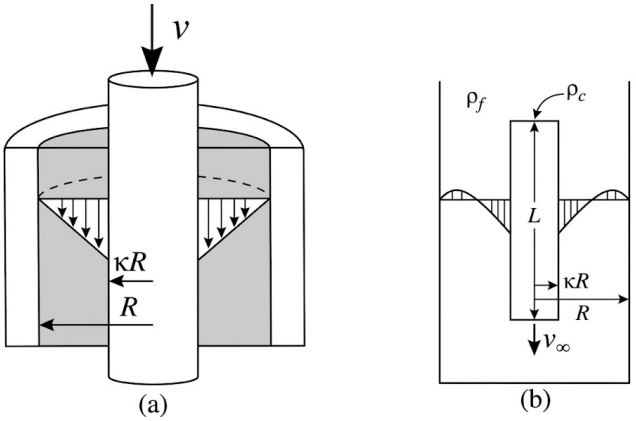


FIG. 19: Rhéomètres à cylindre en chute : (a) extrémités ouvertes pour échantillons très visqueux et (b) extrémité fermée, chute libre. R désigne le rayon du tube, κR le rayon du cylindre, L la longueur du cylindre, ρ_f la densité du fluide, ρ_c la densité du cylindre et v_∞ la vitesse terminale.

En supposant un entrefer large, $\kappa \ll 1$, les relations pour la contrainte de cisaillement et la viscosité newtonienne sont :

$$\tau_{\omega\kappa} = \frac{(\rho_c - \rho_f)\, gR}{2\kappa} \tag{4.45}$$

$$\eta_0 = \frac{(\rho_c - \rho_f)\, gR^2}{2v_\infty} (1 + \ln \kappa) \tag{4.46}$$

Park et Irvine (1988) [33] établissent des relations pour un fluide en loi de puissance. Ils montrent également qu'il est possible de modifier facilement la densité effective de l'aiguille, et donc $\tau_{\omega\kappa}$, en utilisant un tube creux rempli de quantités variables de grenaille d'acier. Cette approche permet d'obtenir la fonction $\eta(\dot{\gamma})$.

4.4.1.3 Bille en Chute

Le temps de chute d'une bille sur une distance donnée dans un fluide constitue probablement l'essai de viscosité le plus simple et certainement l'un des plus anciens [34]. L'écoulement rampant autour d'une sphère est cependant très complexe. La méthode de la bille en chute est donc essentiellement un test indicatif et nécessite une équation constitutive pour une analyse complète. Des analyses de l'écoulement ont été réalisées pour les fluides inélastiques [35, 36] et viscoélastiques [37, 38]. En pratique, une viscosité apparente basée sur l'analyse newtonienne est généralement rapportée :

$$\eta_0 = \frac{2(\rho_s - \rho_f)\, gR^2}{9v_\infty} \tag{4.47}$$

L'écoulement étant lent, cette valeur correspond généralement bien à la viscosité à cisaillement nul, même pour les liquides élastiques rhéofluidifiants. Il convient naturellement de vérifier que la même valeur η_0 est obtenue pour plusieurs billes de densités ou diamètres différents. Lorsque $10R$ est inférieur à D_c, les effets de paroi peuvent être négligés. À l'instar du viscosimètre à aiguille en chute, le viscosimètre à bille peut être rendu étanche pour éviter l'évaporation et permettre des mesures à haute pression.

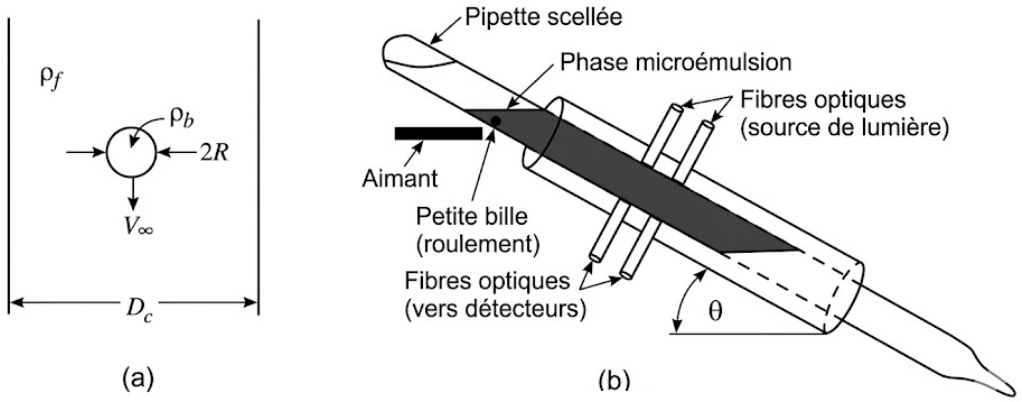


FIG. 20: Viscosimètres à bille : (a) bille en chute libre dans un cylindre de diamètre D_c, de densité de fluide ρ_f et de densité de bille ρ_b, avec vitesse terminale v_∞ ; (b) bille roulante de Bennett et al. (1982) [39] composée d'une pipette scellée, d'une phase microémulsion, de fibres optiques, d'un aimant et d'un roulement à billes, inclinée d'un angle θ.

4.4.1.4 Bille Roulante

L'inclinaison du tube, permettant à la bille de rouler le long d'une paroi plutôt que de tomber verticalement, constitue une solution aux limitations du viscosimètre à bille en chute. En effet, dans les liquides élastiques, la bille dévie souvent de sa trajectoire verticale, tandis que dans les liquides peu visqueux, elle chute trop rapidement. La géométrie roulante impose un trajet reproductible, facilitant ainsi la détection même dans les milieux translucides. De plus, l'angle d'inclinaison offre un double degré de liberté : il permet de moduler à la fois la durée de la mesure et la contrainte de cisaillement effective. Cette flexibilité a néanmoins pour contrepartie une complexité accrue de l'écoulement. Dans la limite $R \ll D_c$, la viscosité s'écrit :

$$\eta_0 = \frac{(\rho_b - \rho_f)\, g R^2 \sin\theta}{v_\infty} \tag{4.48}$$

L'analyse de cet écoulement demeure toutefois sujette à controverse, y compris pour les fluides newtoniens [39].

4.4.1.5 Rhéomètre à Cylindres Coaxiaux

Le premier rhéomètre rotatif pratique fut l'instrument à cylindres coaxiaux de Maurice Couette (1890). Couette utilisa une cupule extérieure rotative et un cylindre intérieur suspendu par un fil de torsion. La déviation angulaire du fil, mesurée par un miroir, indiquait le couple exercé sur le cylindre intérieur. La plupart des instruments commerciaux actuels reposent sur des principes de conception similaires. Les équations de travail reliant la contrainte de cisaillement aux mesures de couple, le taux de cisaillement à la vitesse angulaire, et les coefficients de contraintes normales aux différences de pression radiales sont établies ci-après.

Considérons l'écoulement d'un fluide confiné entre deux cylindres coaxiaux, le cylindre intérieur de rayon R_i tournant à la vitesse angulaire Ω_i, comme illustré à la Figure 21. Le cylindre extérieur de rayon R_o est fixe, L désigne la longueur immergée, L_b la hauteur du fond et M le couple mesuré.

Sous les hypothèses suivantes :

1. Écoulement stationnaire, laminaire et isotherme
2. $v_\theta = r\Omega$ uniquement, avec $v_r = v_z = 0$
3. Effets de gravité et effets de bord négligeables

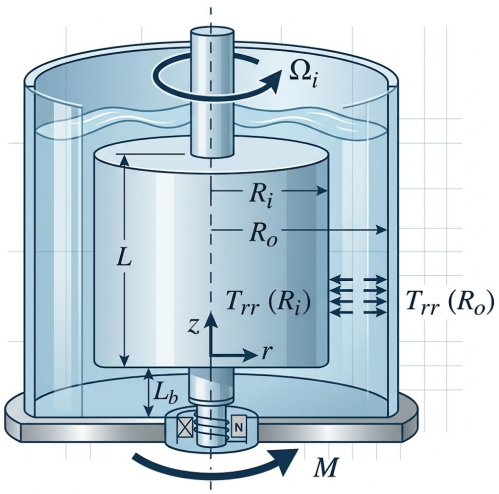


FIG. 21: Schéma du rhéomètre à cylindres coaxiaux. R_i et R_o désignent les rayons des cylindres intérieur et extérieur, Ω_i la vitesse angulaire du cylindre intérieur, L la longueur de la zone de cisaillement, L_b la hauteur du fond, M le couple mesuré et T_{rr} la contrainte normale radiale.

4. Symétrie en θ, soit $\partial/\partial\theta = 0$

les équations du mouvement en coordonnées cylindriques deviennent :

$$r : -\rho\frac{v_\theta^2}{r} = \frac{1}{r}\frac{\partial(rT_{rr})}{\partial r} - \frac{T_{\theta\theta}}{r} \tag{4.49}$$

$$\theta : 0 = \frac{\partial(r^2 T_{r\theta})}{\partial r} \tag{4.50}$$

La contrainte de cisaillement à la paroi du cylindre intérieur est donnée par :

$$T_{21} = \tau_{r\theta}(R_i) = \frac{M_i}{2\pi R_i^2 L} \tag{4.51}$$

La déformation de cisaillement pour les entrefers étroits ($\kappa = R_i/R_o \geq 0.99$) s'écrit :

$$\gamma = \frac{\theta\,\bar{R}}{R_o - R_i} \quad \text{ou} \quad \frac{\Omega t\,\bar{R}}{R_o - R_i} \tag{4.52}$$

où θ est le déplacement angulaire, $\theta = \Omega t$ en rotation stationnaire, et $\bar{R} = (R_o + R_i)/2$ est le rayon moyen. Le taux de déformation dépend de la largeur de l'entrefer. Pour $\kappa > 0.99$:

$$\dot{\gamma}(R_i) \cong \dot{\gamma}(R_o) = \frac{\Omega_i\,\bar{R}}{R_o - R_i} = \frac{2\Omega_i}{1-\kappa^2} \tag{4.53}$$

Pour les entrefers intermédiaires ($0.5 < \kappa < 0.99$), le taux de déformation aux parois intérieure et extérieure vaut respectivement :

$$\dot{\gamma}(R_i) = \frac{2\Omega_i}{n(1-\kappa^{2/n})} \tag{4.54}$$

$$\dot{\gamma}(R_o) = \frac{-2\Omega_i}{n(1-\kappa^{-2/n})} \qquad \text{où} \quad n = \frac{d\ln M_i}{d\ln\Omega_i} \tag{4.55}$$

Enfin, la différence de contraintes normales est reliée à la différence de pression radiale par :

$$T_{11} - T_{22} = \tau_{\theta\theta} - \tau_{rr} = \frac{[\tau_{rr}(R_i) - \tau_{rr}(R_o)]\,\bar{R}}{R_o - R_i} \tag{4.56}$$

$$z : 0 = -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g_z \tag{4.57}$$

L'équation (4.57) détermine simplement la pression hydrostatique dans l'entrefer. L'équation (4.56) gouverne la contrainte normale et l'équation (4.51) la contrainte de cisaillement. Les conditions aux limites sont :

$$v_\theta = \Omega_i R_i \quad \text{en} \quad r = R_i \tag{4.58}$$

$$v_\theta = 0 \quad \text{en} \quad r = R_o \tag{4.59}$$

ou, dans le cas général où les deux cylindres peuvent tourner :

$$v_\theta = \Omega_o R_o \quad \text{en} \quad r = R_o \tag{4.60}$$

Contrainte de cisaillement

La distribution de la contrainte de cisaillement dans l'entrefer est obtenue en intégrant l'équation (4.56) :

$$\tau_{r\theta} = \frac{c_1}{r^2} \tag{4.61}$$

où la constante d'intégration c_1 est déterminée par un bilan de couple. Si le couple est mesuré sur le cylindre intérieur M_i, alors :

$$\frac{M_i}{R_i} = \tau_{r\theta}(R_i)\, 2\pi R_i L \tag{4.62}$$

et donc :

$$\tau_{r\theta}(R_i) = \frac{M_i}{2\pi R_i^2 L} \tag{4.63}$$

Si le couple est mesuré sur le cylindre extérieur :

$$\tau_{r\theta}(R_o) = \frac{M_o}{2\pi R_o^2 L} \tag{4.64}$$

Déformation et Taux de Cisaillement

Pour les entrefers très étroits ($\kappa = R_i/R_o > 0.99$), la courbure peut être négligée et la déformation de cisaillement est identique à celle entre plaques parallèles :

$$B_{r\theta} = \gamma = \frac{\Delta x}{\Delta r} = \frac{\theta\,\bar{R}}{R_o - R_i} \tag{4.65}$$

où θ est le déplacement angulaire du cylindre et $\bar{R}$ est le rayon moyen entre les cylindres :

$$\bar{R} = \frac{R_o + R_i}{2} \tag{4.66}$$

De même, le gradient de vitesse est constant à travers l'entrefer, comme dans l'écoulement entre plaques

parallèles, et le taux de cisaillement est la moyenne dans l'entrefer :

$$\dot{\gamma}(R_i) = \frac{\Delta v}{\Delta r} = \frac{\Omega_i \bar{R}}{R_o - R_i} \qquad \text{(entrefer étroit)} \tag{4.67}$$

Ce résultat est généralement utilisé pour évaluer le cisaillement dans les viscosimètres de Couette. Cependant, pour de nombreux instruments, R_i/R_o est inférieur à 0.99, et une analyse plus précise est nécessaire. À partir des composantes du tenseur du taux de déformation en coordonnées cylindriques, le taux de cisaillement s'écrit :

$$|2D_{r\theta}| = \dot{\gamma} = \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} = r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\theta}{r}\right) = r\frac{d\Omega}{dr} \tag{4.68}$$

Le problème avec un viscosimètre à large entrefer est que le taux de cisaillement varie à travers l'entrefer. En principe, pour évaluer la dérivée de l'équation (4.68), des mesures du profil de vitesse seraient nécessaires. Ces mesures délicates peuvent être évitées en utilisant l'équation (4.61) pour exprimer le taux de cisaillement en fonction de $\tau_{r\theta}$:

$$\dot{\gamma}(r) = \left| r\frac{d\Omega}{dr} \right| = 2\tau_{r\theta}\frac{d\Omega}{d\tau_{r\theta}} \tag{4.69}$$

En omettant l'indice $r\theta$, on obtient :

$$\dot{\gamma}(\tau) = 2\tau\frac{d\Omega}{d\tau} \tag{4.70}$$

En intégrant pour un cylindre intérieur en rotation à $\Omega_i(R_i) = \Omega_i$ et un cylindre extérieur fixe :

$$\int_0^{\Omega_i} d\Omega = \Omega_i = \int_{\tau_{R_o}}^{\tau_{R_i}} \frac{\dot{\gamma}(\tau)}{2(\tau)} d\tau \tag{4.71}$$

En différentiant par rapport à τ_{R_i} :

$$\frac{d\Omega_i}{d\tau_{R_i}} = \frac{1}{2}\left[\frac{\dot{\gamma}(\tau_{R_i})}{\tau_{R_i}} - \frac{\dot{\gamma}(\tau_{R_o})}{\tau_{R_o}}\frac{d\tau_{R_o}}{d\tau_{R_i}}\right] \tag{4.72}$$

Des équations (4.63) et (4.64), on tire :

$$\frac{d\tau_{R_o}}{d\tau_{R_i}} = \left(\frac{R_i}{R_o}\right)^2 \tag{4.73}$$

En substituant, on obtient :

$$2\tau_{R_i}\frac{d\Omega_i}{d\tau_{R_i}} = \dot{\gamma}(\tau_{R_i}) - \dot{\gamma}(\tau_{R_o}) \tag{4.74}$$

Pour un entrefer large, si $\kappa = R_i/R_o < 0.1$, alors $\tau_{R_o} < 0.01\,\tau_{R_i}$ et $\dot{\gamma}(\tau_{R_o}) \ll \dot{\gamma}(\tau_{R_i})$. Pour un fluide en loi de puissance, le rapport des taux de cisaillement vaut $(\kappa)^{2/n}$, ce qui pour $\kappa \leq 0.1$ et $n = 1/3$ donne un rapport de l'ordre de 10^{-6}. Le terme $\dot{\gamma}(\tau_{R_o})$ devient alors négligeable et l'équation (4.74) se simplifie :

$$2\tau_{R_i}\frac{d\Omega_i}{d\tau_{R_i}} \cong \dot{\gamma}(\tau_{R_i}) \tag{4.75}$$

soit :

$$\dot{\gamma}_{R_i} \cong 2\Omega_i\frac{d\ln\Omega_i}{d\ln M_i} \tag{4.76}$$

Newton avait tenté de dériver cette équation dans ses *Principia*, mais une erreur s'y était glissée, qui ne fut découverte qu'en 1845 par Stokes, lors du calcul du vrai taux de cisaillement pour les instruments à cylindre rotatif immergé dans un grand bain de fluide [40].

Cette dérivation est caractéristique des rhéomètres non homogènes : la dérivée de la vitesse par rapport à la position, difficile à mesurer, est transformée en une dérivée de la contrainte par rapport à la vitesse de rotation ou au débit. On retrouvera cette approche pour les disques parallèles et les rhéomètres à écoulement par pression.

De nombreux rhéomètres à cylindres coaxiaux utilisent un entrefer intermédiaire, $0.5 < \kappa < 1.0$. Pour déterminer le taux de cisaillement dans ce cas, l'équation (4.74) est développée en série de Maclaurin [41, 42] :

$$\dot{\gamma}(\tau_{R_i}) = \frac{\Omega_i}{-\ln\kappa}\left[1 - \frac{1}{n}\ln\kappa + \left(\frac{1}{n}\ln\kappa\right)^{2/3} - \left(\frac{1}{n}\ln\kappa\right)^{4/45} + \cdots\right] \tag{4.77}$$

où n est l'indice de loi de puissance, ou en termes de couple et de vitesse de rotation :

$$n = \frac{d\ln M_i}{d\ln\Omega_i} \tag{4.78}$$

Lorsque $-(\ln\kappa)/n < 0.2$, les deux premiers termes suffisent avec une erreur inférieure à 1%. Pour $0.2 < -(\ln\kappa/n) < 1.0$, le troisième terme doit être inclus. Pour $\kappa > 0.5$, si n est constant entre τ_{R_i} et τ_{R_o}, on retrouve le cas de la loi de puissance et les expressions aux parois intérieure et extérieure sont :

$$\dot{\gamma}_{R_i} = \frac{2\Omega_i}{n(1-\kappa^{2/n})} \tag{4.79}$$

$$\dot{\gamma}_{R_o} = \frac{-2\Omega_i}{n(1-\kappa^{-2/n})} \tag{4.80}$$

Pour les instruments à cylindre extérieur tournant à Ω_0, il suffit de remplacer Ω_i par Ω_0 dans les équations (4.79) et (4.80). De nombreux instruments commerciaux fonctionnent avec un entrefer étroit ($\kappa > 0.9$) et préconisent l'utilisation de l'équation newtonienne ($n = 1$) pour dépouiller les données. L'erreur introduite par cette approximation pour un fluide en loi de puissance est :

$$\left.\frac{\dot{\gamma}_{\text{power}}}{\dot{\gamma}_{\text{Newt}}}\right|_{R_i} = \frac{1-\kappa^2}{n(1-\kappa^{2/n})} \tag{4.81}$$

Pour les fluides rhéofluidifiants typiques, $1 < n < 1/4$. Si l'entrefer est suffisamment étroit ($\kappa > 0.99$), l'erreur commise en utilisant l'équation simplifiée reste inférieure à 3%. Dans le cas contraire, il convient de tracer les données en $\ln M$ versus $\ln\Omega$ et d'évaluer n graphiquement ou numériquement avant d'appliquer les équations (4.79) ou (4.80). La Figure 22 illustre l'amplitude de l'erreur pour $\kappa = 0.794$ sur une solution polymère pseudoplastique.

Dans l'analyse précédente, un écoulement de Couette idéal est supposé, avec $\mathbf{v} = v(0, r\Omega, 0)$. Pour les suspensions concentrées, les gels et certaines solutions polymères, une couche de faible viscosité peut se former près des parois des cylindres, induisant un glissement apparent. La vitesse de glissement peut être déterminée en effectuant des mesures avec deux bobs de rayons différents R_1 et R_2, les cupules étant

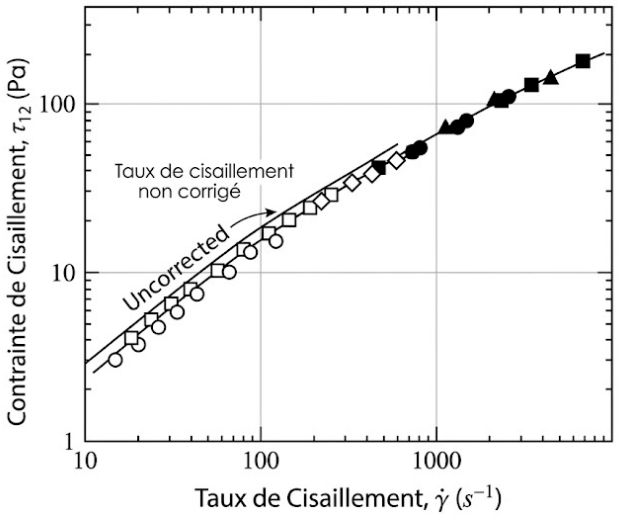


FIG. 22: Contrainte de cisaillement en fonction du taux de cisaillement pour un viscosimètre à cylindres coaxiaux (Eppreht, modèle RM-15), $\kappa = 0.794$. Le taux de cisaillement non corrigé (éq. (4.67)) est comparé au taux de cisaillement réel (éq. (4.79)), avec n évalué graphiquement en fonction de $\dot{\gamma}$, pour une solution de carboxyméthylcellulose à 1% [43].

dimensionnées de manière à conserver le même κ [44] :

$$v_s(\theta) = \frac{\kappa}{\kappa + 1} \left[\frac{\Omega_1 - \Omega_2}{\dfrac{1}{R_1} - \dfrac{1}{R_2}} \right] \tag{4.82}$$

Cette vitesse de glissement permet de corriger les mesures de taux de cisaillement afin d'obtenir la vraie viscosité du matériau. Kiljanski (1989) [45] a également proposé une méthode à deux bobs ne nécessitant pas le même κ. Dans certains cas de suspensions concentrées, le glissement aux parois et la fracture de l'échantillon peuvent être si prononcés qu'il devient impossible de mesurer une vraie viscosité. Une solution consiste à utiliser un bob à ailettes, qui sera présenté ultérieurement.

Contraintes Normales dans l'écoulement de Couette

L'un des phénomènes les plus remarquables des liquides élastiques est leur tendance à grimper le long d'un cylindre en rotation. Pour une huile newtonienne, la surface près du cylindre est légèrement déprimée, agissant comme un manomètre sensible à la faible pression négative générée par la force centrifuge. En revanche, une solution de polyisobutylène dans l'huile présente une remontée importante de la surface libre. Ce comportement trouve son origine dans les termes de contraintes normales de la composante radiale de l'équation du mouvement. En la réarrangeant, on obtient :

$$-\rho \frac{v_\theta^2}{r} = \frac{\partial \tau_{rr}}{\partial r} - \frac{\tau_{\theta\theta} - \tau_{rr}}{r} \tag{4.83}$$

Le numérateur du second terme du membre de droite correspond à la première différence de contraintes normales, $T_{11} - T_{22}$. Pour un entrefer étroit, on peut écrire :

$$\frac{\partial \tau_{rr}}{\partial r} \cong \frac{\tau_{rr}(R_i) - \tau_{rr}(R_o)}{R_o - R_i} \tag{4.84}$$

En négligeant les effets inertiels, la première différence de contraintes normales s'exprime directement par :

$$\tau_{11} - \tau_{22} = \tau_{\theta\theta} - \tau_{rr} = \frac{[\tau_{rr}(R_i) - \tau_{rr}(R_o)]\,\bar{R}}{R_o - R_i} \tag{4.85}$$

où $\bar{R}$ est le rayon moyen entre les cylindres défini précédemment. La quantité $\tau_{rr}(R_i) - \tau_{rr}(R_o)$ représente simplement la différence de pression entre les cylindres intérieur et extérieur. La première différence de contraintes normales étant généralement un nombre positif élevé, la pression au cylindre intérieur sera plus grande, forçant le fluide à remonter le long du cylindre.

L'utilisation de l'écoulement de Couette à entrefer étroit pour la mesure des contraintes normales présente néanmoins plusieurs difficultés. Le montage d'un capteur de pression à pointe plate sur la surface courbe d'un cylindre nécessite des orifices, source d'erreurs de pression. De plus, la transmission des signaux des capteurs à travers un arbre rotatif requiert des bagues collectrices, ce qui peut réduire la précision. Enfin, pour les entrefers étroits, $\tau_{rr}(R_i) \cong \tau_{rr}(R_o)$, ce qui introduit une incertitude considérable sur $\tau_{11} - \tau_{22}$. Cette incertitude peut être réduite en travaillant avec un large entrefer. Les relations correspondantes s'obtiennent en intégrant l'équation indiquée précédemment de R_o à R_i :

$$\Delta p_r = \tau_{rr}(R_i) - \tau_{rr}(R_o) = \int_{R_o}^{R_i} (\tau_{\theta\theta} - \tau_{rr})\, d\ln r - \int_{R_o}^{R_i} \frac{\rho v_\theta^2}{r}\, dr \tag{4.86}$$

Si l'entrefer n'est pas trop large, v_θ varie approximativement de façon linéaire à travers l'entrefer et la seconde intégrale devient :

$$\int_{R_o}^{R_i} \rho r \Omega^2(r)\, dr = -\frac{1}{2}\rho R^2 \Omega = \Delta p_{\text{inertia}} \tag{4.87}$$

Ce terme étant négatif, la pression au cylindre intérieur sera inférieure à celle au cylindre extérieur pour un fluide newtonien, et la surface libre sera déprimée. Pour les entrefers plus larges, un écoulement secondaire apparaît et apporte une contribution supplémentaire :

$$\Delta p_{\text{inertia}} = \frac{1}{2}\rho R_o^2 \Omega_i^2 \left[1 + \frac{1 - \kappa^2 - 4\ln\kappa}{\kappa^{-2} - 1}\right] \tag{4.88}$$

L'une ou l'autre des corrections inertielles peut être ajoutée à la différence de pression mesurée Δp_r pour obtenir une différence de pression effective, qui sera une fonction de $N_1 = \tau_{\theta\theta} - \tau_{rr}$:

$$\Delta p_r^i = \Delta p_r + \Delta p_{\text{inertia}} \tag{4.89}$$

Pour évaluer l'intégrale restante, on utilise l'équation (4.61) pour effectuer un changement de variable de r à τ, comme dans la dérivation des relations de taux de cisaillement :

$$\Delta p_r^i = \frac{1}{2}\int_{\tau_{R_o}}^{\tau_{R_i}} N_1\, d\ln\tau \tag{4.90}$$

En différentiant cette expression par rapport à $\ln\Omega$, on obtient :

$$\frac{d\Delta p_r^i}{d\ln\Omega} = N_1(\tau_{R_i})\frac{d\ln\tau_{R_i}}{d\ln\Omega} - N_2(\tau_{R_o})\frac{d\ln\tau_{R_o}}{d\ln\Omega} \tag{4.91}$$

Pour un fluide en loi de puissance, $d\ln\tau_{R_i}/d\ln\Omega = d\ln\tau_{R_o}/d\ln\Omega = n$, et N_1 peut être évalué à partir d'un tracé de Δp_r^i en fonction de $\ln\Omega$. Il est cependant plus fiable de tracer Δp_r^i en fonction de $\ln\tau$ conformément à l'équation (4.90) et d'effectuer une intégration numérique ou graphique. Une alternative à la mesure de faibles différences de pression entre les surfaces cylindriques courbes a été développée par

Giesekus et collaborateurs [46]. Leur approche consiste à rendre le cylindre intérieur légèrement excentrique et à mesurer la poussée latérale totale exercée sur le cylindre extérieur fixe. Les résultats obtenus sont en bon accord avec les mesures réalisées sur des géométries cône-plan pour deux solutions polymères.

4.4.1.6 Rhéomètre Cône-Plan

Mooney et Ewart (1934) [47] semblent avoir été les premiers à proposer la géométrie cône-plan pour les mesures de viscosité. Russell (1946) [48] l'a utilisée pour les mesures de contraintes normales. Ces travaux ont conduit au développement du Rhéogoniomètre de Weissenberg [49, 50] et de l'instrument Ferranti Shirley [51]. Aujourd'hui, la géométrie cône-plan, avec son taux de cisaillement constant et la mesure directe de N_1 par la poussée totale, est probablement la géométrie rotative la plus utilisée pour l'étude des effets non newtoniens.

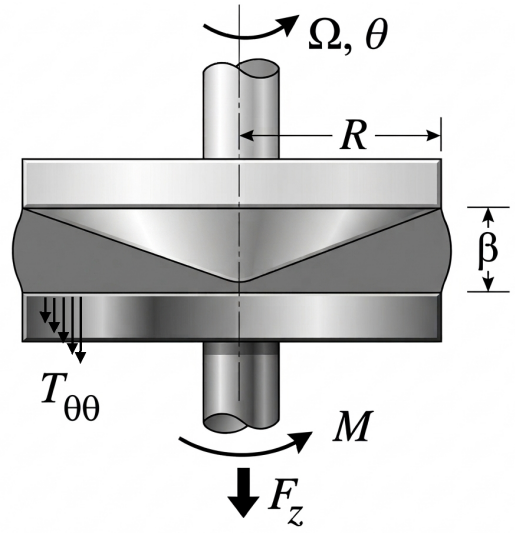


FIG. 23: Schéma du rhéomètre cône-plan. Ω désigne la vitesse angulaire, ϕ l'angle azimutal, β l'angle du cône, R le rayon, M le couple mesuré, F_z la force normale et $T_{\theta\theta}$ la contrainte normale.

La géométrie cône-plan est illustrée à la Figure 23. Les coordonnées sphériques sont les plus adaptées à ce problème. Sous les hypothèses suivantes :

1. Écoulement stationnaire, laminaire et isotherme
2. $v_\phi(r,\theta)$ uniquement, avec $v_r = v_\theta = 0$
3. $\beta < 0{,}10$ rad (≈ 6)
4. Forces de volume négligeables
5. Frontière liquide sphérique

les équations du mouvement en coordonnées sphériques se réduisent à :

$$r : \frac{\rho v_\phi^2}{r} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\tau_{rr}) - \frac{\tau_{\theta\theta}+\tau_{\phi\phi}}{r} \tag{4.92}$$

$$\theta : 0 = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\tau_{\theta\phi}\sin\theta)}{\partial\theta} - \frac{\cot\theta\,\tau_{\phi\phi}}{r} \tag{4.93}$$

$$\phi : 0 = \frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{\theta\phi}}{\partial \theta} + \frac{2}{r}\cot\theta\,\tau_{r\phi} \tag{4.94}$$

Les conditions aux limites sont :

$$v_\phi\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \tag{4.95}$$

$$v_\phi\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \Omega r \sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) \tag{4.96}$$

Puisque $\sin(\pi/2 - \beta) = \cos\beta = 1 - \frac{\beta^2}{2!} + \frac{\beta^4}{4!}\cdots \cong 1$ à moins de 1% pour $\beta \leq 0.1$, la condition aux limites devient :

$$v_\phi\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \Omega r \tag{4.97}$$

Contrainte de Cisaillement

En intégrant l'équation (4.94), la contrainte de cisaillement est :

$$\tau_{\phi\theta} = \frac{C_1}{\sin^2\theta} \tag{4.98}$$

Un bilan de couple sur le plateau donne :

$$M = \int_0^{2\pi}\int_0^R r^2 \tau_{\phi\theta}\Big|_{(\pi/2)}\, dr\, d\phi = \frac{2\pi R^3}{3}\tau_{\phi\theta}\Big|_{(\pi/2)} \tag{4.99}$$

Les équations de travail pour la géométrie cône-plan sont résumées dans le Tableau 3.

En notant que $\tau_{\phi\theta}|_{\pi/2} = C_1 = \tau_{\phi\theta}(\theta)\sin^2\theta$, on substitue pour obtenir :

$$\tau_{\phi\theta}(\theta) = \frac{3M}{2\pi R^3 \sin^2\theta} \tag{4.100}$$

Pour $\beta < 0.1$ rad, on a $1 > \sin^2(\pi/2 - \beta) \geq \sin^2(\pi/2 - 0.1) = 0.990$, ce qui signifie que la contrainte de cisaillement est essentiellement constante dans tout le fluide :

$$\tau_{12} = \tau_{\phi\theta} = \frac{3M}{2\pi R^3} \tag{4.101}$$

Déformation et Taux de Cisaillement

Puisque τ_{12} est pratiquement constant, la déformation et le taux de cisaillement le sont également. À partir du tenseur B en coordonnées sphériques, la déformation de cisaillement est :

$$B_{\phi\theta} = \gamma = \frac{\phi}{\beta} \tag{4.102}$$

De même, à partir du tenseur D en coordonnées sphériques :

$$|2D_{\phi\theta}| = \dot{\gamma} = \left|\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{v_\phi}{\sin\theta}\right)\right| = \left|\frac{1}{r}\frac{\partial v_\phi}{\partial\theta} - \frac{v_\phi}{r}\cot\theta\right| \tag{4.103}$$

Pour $\theta = \pi/2 - \beta$, on peut réécrire $\cot\theta$ comme :

$$\cot\theta = \cot\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \tan\beta \tag{4.104}$$

TAB. 3: Équations de travail pour la géométrie Cône-Plan

Grandeur	**Équation**
Contrainte de cisaillement	$\tau_{12} = \tau_{\phi\theta} = \dfrac{3M}{2\pi R^3}$
Déformation de cisaillement	$\gamma = \dfrac{\phi}{\beta}$ (homogène)
Taux de cisaillement	$\dot{\gamma} = \dfrac{\Omega}{\beta}$
Contrainte normale	$\tau_{11} - \tau_{22} = \tau_{\phi\phi} - \tau_{\theta\theta} = \dfrac{2F_z}{\pi R^2}$
Corrections	
Inertie et écoulement secondaire	$N_1 = \dfrac{2F_z}{\pi R^2} - 0.15\rho\,\Omega^2 R^2$
Correction du couple	$\dfrac{M}{M_0} = 1 + 6.1 \times 10^{-4}\mathrm{Re}^2, \quad \mathrm{Re} = \dfrac{\rho\Omega\beta^2 R^2}{\eta_0}$
Ouverture de l'entrefer	$\dfrac{6\pi R\eta_0}{\kappa\beta^5} <$ temps de relaxation du matériau
Échauffement visqueux	$\dfrac{M}{M_0} = \dfrac{1 - b\,\mathrm{Br}}{20n}$
Avantages et limitations	
Instrument le plus courant pour les mesures de contraintes normales. Équations de travail simples avec déformation homogène. Adapté à la viscoélasticité non linéaire $G(t,\gamma)$. Utilisable pour les matériaux de faible et haute viscosité. Limité en haute viscosité par la rupture élastique des bords. Limité en faible viscosité par les corrections inertielles, les écoulements secondaires et la perte d'échantillon aux bords.	

β étant petit, on approche $\tan\beta$ par :

$$\tan\beta \simeq \beta + \frac{\beta^3}{3} \tag{4.105}$$

Le profil de vitesse est bien approximé par :

$$v_\phi = \Omega r \frac{(\pi/2) - \theta}{\beta} \tag{4.106}$$

et le taux de cisaillement est alors :

$$\dot{\gamma} = \frac{\Omega}{\beta}\left(1 + \beta^2 + \frac{\beta^4}{3}\right) \approx \frac{\Omega}{\beta} \tag{4.107}$$

Adams et Lodge (1964) [52] ont montré que l'erreur sur le taux de cisaillement au plateau est inférieure à 0.7% à 0.1 rad et seulement 2% à 0.18 rad. L'intérêt majeur de la géométrie cône-plan réside dans le fait que le taux de cisaillement et la contrainte de cisaillement sont indépendants de la position et peuvent être calculés directement, sans qu'aucune différentiation des données ne soit nécessaire pour obtenir la relation $\tau_{12}(\dot{\gamma})$ d'un fluide inconnu.

Contraintes Normales

Les différences de contraintes normales peuvent être déterminées à partir des mesures de pression et de

poussée sur le plateau. En négligeant les effets inertiels, l'équation (4.92) s'écrit :

$$r\frac{\partial \tau_{rr}}{\partial r} = \tau_{\phi\phi} + \tau_{\theta\theta} - 2\tau_{rr} = N_1 + 2N_2 \tag{4.108}$$

Rappelons que N_2 est une fonction matérielle de cisaillement permanent et ne dépend que du taux de cisaillement. Puisque $\dot{\gamma}$ est indépendant de r, on a :

$$\frac{\partial N_2}{\partial r} = \frac{\partial \tau_{\theta\theta}}{\partial r} - \frac{\partial \tau_{rr}}{\partial r} = 0 \quad \text{soit} \quad \frac{\partial \tau_{\theta\theta}}{\partial r} = \frac{\partial \tau_{rr}}{\partial r} \tag{4.109}$$

L'équation (4.108) se simplifie alors en :

$$\frac{\partial \tau_{\theta\theta}}{\partial \ln r} = N_1 + 2N_2 \tag{4.110}$$

où $\tau_{\theta\theta}$ correspond à la pression mesurée par un capteur situé sur le plateau ou sur la surface du cône. À vitesse angulaire Ω fixée, le tracé de $\tau_{\theta\theta}$ en fonction de $\ln r$ doit donc donner une droite. Miller et Christiansen (1972) [53] ont monté des capteurs de pression à fleur de la surface du plateau et ont mesuré $\tau_{\theta\theta}(r)$ sur une solution de polyacrylamide (PAA) à 1,49 %. Comme le montre la Figure 24, $\tau_{\theta\theta}$ varie bien linéairement avec $\log r$ pour différents taux de cisaillement $\left(34{,}3\,;\, 89{,}3\,;\, 224{,}4\,;\, 355{,}6\ \text{s}^{-1}\right)$, ce qui confirme la relation théorique. On remarque également qu'une légère surpression positive subsiste au bord du plateau, $\tau_{\theta\theta}(R)$.

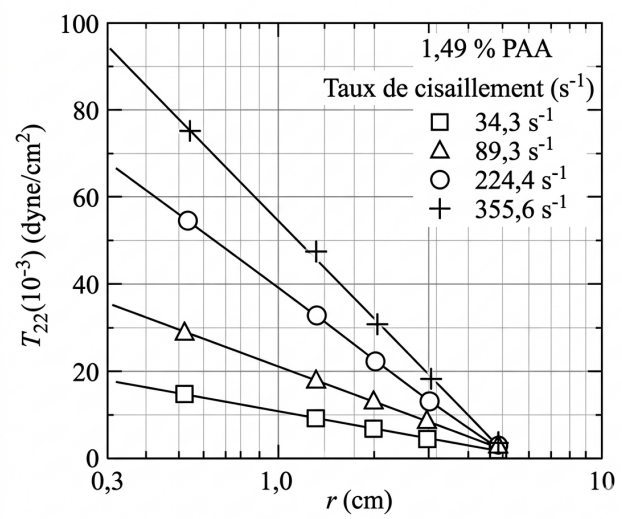


FIG. 24: Contrainte normale en fonction de $\log r$ pour une solution de polyacrylamide à 1,49 %. D'après Miller et Christiansen (1972) [53].

Si l'on suppose que la contrainte radiale en $r = R$ est compensée par la pression ambiante p_a (c'est-à-dire en l'absence de tension de surface ou d'effets de bord), alors $\tau_{\theta\theta}(R)$ n'est autre que la *deuxième différence de contraintes normales* :

$$N_2 = \tau_{22} - \tau_{33} = \tau_{\theta\theta}(R) - \tau_{rr}(R) = \tau_{\theta\theta}(R) - 0 \tag{4.111}$$

Il est plus courant et plus pratique de mesurer la *poussée totale* exercée sur le plateau. En réalisant un bilan de forces, on obtient :

$$F_z = -\int_0^{2\pi}\int_0^R \tau_{\theta\theta}(r)\, dr\, d\phi - p_a \pi R^2 \tag{4.112}$$

En intégrant par parties et en notant que $\tau_{\phi\phi}+\tau_{\theta\theta}-2\tau_{rr} = N_1+2N_2$ ne dépend que du taux de cisaillement

(donc pas de r), on obtient :

$$F_z = -\pi R^2 \left[\tau_{\theta\theta}(R) - \left(\frac{\tau_{\phi\phi} + \tau_{\theta\theta} - 2\tau_{rr}}{2} \right) + p_a \right] \tag{4.113}$$

ou encore :

$$F_z = -\pi R^2 \left[\left(\frac{\tau_{\theta\theta} - \tau_{\phi\phi}}{2} \right) + \tau_{rr} + p_a \right]$$

Si le bord libre est de forme sphérique et si les effets de tension de surface sont négligeables, alors $\tau_{rr}(R)$ est équilibré par p_a, et l'on obtient le résultat simplifié :

$$F_z = \frac{\pi R^2}{2} \left(\tau_{\phi\phi} - \tau_{\theta\theta} \right) = \frac{1}{2} \pi R^2 N_1 \tag{4.114}$$

soit :

$$\boxed{N_1 = \frac{2F_z}{\pi R^2}} \tag{4.115}$$

Miller et Christiansen (1972) [53] ont également mesuré la poussée totale et en ont déduit les valeurs de N_1 présentées en Figure 5.4.3. En soustrayant $2\tau_{\theta\theta}(R)$ aux pentes de la Figure 24, on peut calculer N_1 indépendamment. La comparaison des deux méthodes — poussée totale d'une part, pentes de la Figure 24 d'autre part — constitue un test de cohérence des mesures de pression au bord. Les résultats obtenus par les deux approches, pour deux angles de cône différents, concordent bien, notamment pour N_1.

4.4.1.7 Disques Parallèles

La géométrie à disques parallèles a été proposée par Mooney (1934) [47]. Le rhéomètre de Mooney, constitué d'un disque tournant à l'intérieur d'une cavité cylindrique, est largement utilisé dans l'industrie du caoutchouc (norme ASTM D1646). Russell (1946) [48] a été le premier à mesurer les contraintes normales à partir de la poussée totale entre deux disques. Greensmith et Rivlin (1953) [54] ont ensuite mesuré la distribution de pression, et Kotaka et al. (1959) [55] ont utilisé la poussée totale pour étudier les contraintes normales dans des polymères fondus. En bien des aspects, cet écoulement est similaire à celui du cône-plateau. La plupart des instruments modernes permettent d'ailleurs d'utiliser l'une ou l'autre géométrie. Toutefois, à la différence du cône-plateau, l'écoulement entre disques parallèles n'est pas homogène. La géométrie est schématisée en Figure 25. En supposant :

1. un écoulement laminaire, permanent et isotherme,
2. $v_\theta(r, z)$ seule non nulle, avec $v_r = v_z = 0$,
3. des forces de volume négligeables,
4. un bord cylindrique,

les équations du mouvement se réduisent à :

$$\theta : \quad \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} = 0 \tag{4.116}$$

$$z : \quad \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} = 0 \tag{4.117}$$

$$r : \quad \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r\tau_{rr}) - \frac{\tau_{\theta\theta}}{r} = -\rho \frac{v_\theta^2}{r} \tag{4.118}$$

Un disque étant fixe et l'autre tournant à la vitesse angulaire Ω, en supposant l'absence de glissement aux

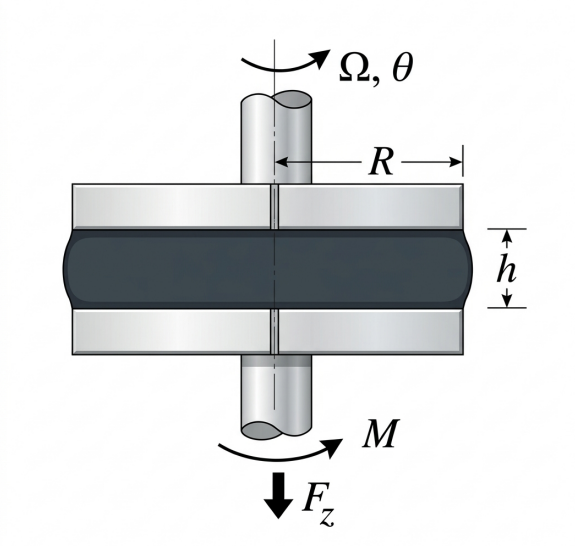


FIG. 25: Schéma d'un rhéomètre à plateaux parallèles.

surfaces et en négligeant les forces d'inertie, le champ de vitesse s'écrit :

$$v_\theta(r,z) = \frac{r\Omega z}{h} \tag{4.119}$$

et le taux de cisaillement vaut :

$$\dot{\gamma}(r) = \frac{r\Omega}{h} \tag{4.120}$$

La déformation de cisaillement varie linéairement de zéro au centre jusqu'à un maximum au bord :

$$\gamma = \frac{\theta r}{h} \tag{4.121}$$

Le taux de cisaillement au bord $r = R$ vaut :

$$\dot{\gamma}_R = \frac{R\Omega}{h} \tag{4.122}$$

Contrairement au cône-plateau, le taux de cisaillement n'est pas uniforme dans la géométrie à disques parallèles — il dépend de la position radiale. On se trouve ainsi dans une situation analogue à celle de l'écoulement de Couette à grand entrefer ou de Poiseuille, où il est nécessaire de faire appel à une dérivée pour relier la contrainte de cisaillement au couple total. En partant de l'équation 5.5.1 et en notant que la contrainte de cisaillement est une fonction du seul taux de cisaillement, $\tau_{\theta z} = \tau_{12} = \tau_{12}(\dot{\gamma})$, le bilan de couple s'écrit :

$$M = 2\pi \int_0^R r\,\tau_{12}(r)\,r\,dr \tag{4.123}$$

En effectuant le changement de variable $r = \frac{h}{\Omega}\dot{\gamma} = \frac{R\dot{\gamma}}{\dot{\gamma}_R}$, puis en dérivant par la règle de Leibniz, on obtient la contrainte vraie au bord :

$$\tau_{12}(R) = \frac{M}{2\pi R^3}\left[3 + \frac{d\ln M}{d\ln\dot{\gamma}_R}\right] \tag{4.124}$$

En pratique, la dérivée $d\ln M/d\ln\dot{\gamma}_R$ est généralement inférieure à 1, ce qui implique une erreur inférieure à 3 % sur τ_{12} si l'on néglige ce terme. Pour un fluide newtonien, cette dérivée vaut exactement 1 et la contrainte se réduit à la *contrainte apparente* :

$$\tau_a(R) = \frac{2M}{\pi R^3} \tag{4.125}$$

Cette contrainte apparente est souvent utilisée pour calculer une viscosité apparente, car une seule mesure de couple suffit. Une méthode approchée, développée par Geisekus et Langer (1977) [56] et analogue à celle utilisée en rhéométrie capillaire, montre que la viscosité vraie est égale à la viscosité apparente évaluée à $\tau = 0{,}76\,\tau_a$, à condition que $d\ln M / d\ln \dot{\gamma}_R < 1{,}4$:

$$\eta(\tau) = \eta_a(\tau_a) \pm 2\,\% \quad \text{pour} \quad \tau = 0{,}76\,\tau_a \tag{4.126}$$

La géométrie à disques parallèles présente plusieurs avantages pratiques par rapport au cône-plateau. Le chargement et le déchargement des échantillons — notamment les solides mous ou les polymères fondus très visqueux — y sont plus aisés. Elle est donc particulièrement adaptée à la mesure des fonctions viscoélastiques $G(t,\gamma)$, $G'(\omega)$ ou $J(t,\tau)$. Pour évaluer les modules ou la compliance, on utilise la contrainte et la déformation au bord (éqs. (4.121) et (4.124), en appliquant la correction $d\ln M/d\ln\gamma$ selon Soskey et Winter (1984) [57]. Dans le domaine linéaire, $G(t,\gamma) = G(t)$ et $d\ln M/d\ln\gamma = 1$.

Cette géométrie est également très utile pour accéder à des taux de cisaillement élevés : d'après l'équation (4.122), on peut augmenter $\dot{\gamma}_R$ soit en accroissant la vitesse de rotation, soit en réduisant l'entrefer h. Les erreurs dues aux écoulements secondaires, aux effets de bord et à l'échauffement visqueux sont toutes atténuées par un faible entrefer. Binding et Walters (1976) [58] ont atteint 10^5 s^{-1} avec $h = 3{,}2$ μm. Connelly et Greener (1985) [59] ainsi que Kramer et al. (1985) [60] ont montré qu'en dessous d'environ 300 μm, il est nécessaire de corriger une erreur systématique sur l'entrefer. Pour un fluide newtonien, cette correction se traduit par :

$$\frac{\dot{\gamma}_h}{\tau_R} = \frac{h}{\eta} + \frac{h_e}{\eta} \tag{4.127}$$

où $\dot{\gamma}_h$ est le taux de cisaillement apparent calculé à l'entrefer mesuré, et $h_e = 10$ à 40 μm est un terme d'erreur constant. Une autre application des mesures à entrefers multiples en géométrie disques parallèles est la détermination du *glissement à la paroi*. Yoshimura et Prud'homme (1988) [44] ont montré que la différence de contrainte apparente mesurée à deux entrefers distincts peut être directement reliée au glissement, de manière analogue à l'équation (4.82). Vrentas et al. (1991) [61] ont analysé l'effet du remplacement du disque inférieur par une coupelle sur le couple mesuré. Pour de petits entrefers et de grandes coupelles ($R_{\text{cup}}/R > 1{,}1$), le couple supplémentaire ne dépend plus que du rapport h/R :

$$\frac{M}{M_0} = 1 + 1{,}9\,\frac{h}{R} \tag{4.128}$$

Contraintes normales

Les contraintes normales découlent de l'équation (4.118). En négligeant le terme d'inertie et en notant que :

$$\frac{d\tau_{22}}{dr} = \frac{d\tau_{33}}{dr} + \frac{d}{dr}(\tau_{22} - \tau_{33}) \tag{4.129}$$

$$\frac{d\tau_{22}}{dr} = -\frac{\tau_{22} - \tau_{11}}{r} + \frac{d}{dr}(\tau_{22} - \tau_{33}) \tag{4.130}$$

En intégrant de r à R, et après substitution de N_1 et N_2, on obtient le profil de pression sur le plateau :

$$\tau_{22}(r) = N_2(r) - \int_r^R \frac{N_1 + N_2}{\zeta}\, d\zeta \tag{4.131}$$

En supposant que $\tau_{33}(R)$ est équilibré par la pression atmosphérique et que la surface libre est cylindrique avec une tension de surface négligeable, la distribution de pression sur le disque parallèle n'est pas aussi simple que l'équation (4.105) pour le cône-plateau : il n'existe pas de relation linéaire simple, comme le montrent les données de Greensmith et Rivlin (1953) [54]. Notons que $p_{\text{rim}} = N_2$ reste valide. En pratique, on mesure plus souvent la *poussée totale*. En intégrant l'équation (4.126) pour F_z, puis en changeant

l'ordre d'intégration :

$$F_z = -2\pi \int_0^R N_2 r\, dr + 2\pi \int_0^R \frac{N_1 + N_2}{\zeta} \left(\int_0^\zeta r\, dr \right) d\zeta$$
$$= -\pi \int_0^R (N_2 - N_1)\, r\, dr \tag{4.132}$$

En changeant à nouveau de variables via l'équation (4.123) et en différenciant par rapport à $\dot{\gamma}_R$, on obtient :

$$\frac{2\dot{\gamma}_R F_z}{\pi R^2} + \frac{\dot{\gamma}_R^2}{\pi R^2} \frac{dF_z}{d\dot{\gamma}_R} = \dot{\gamma}_R (N_1 - N_2) \tag{4.133}$$

soit :

$$(N_1 - N_2)|_{\dot{\gamma}_R} = \frac{F_z}{\pi R^2} \left[2 + \frac{d \ln F_z}{d \ln \dot{\gamma}_R} \right] \tag{4.134}$$

Les effets d'écoulements secondaires sont analogues à ceux observés en géométrie cône-plateau. Turian (1972) [62] montre que ses équations (**??**) et (**??**) restent valables pour les disques parallèles en substituant h/R à β. Les résultats expérimentaux de Greensmith et Rivlin (1953) [54], décrits en lien avec l'équation (**??**), concernent précisément les disques parallèles et s'accordent avec la théorie.

Les excentricités et défauts d'alignement sont moins critiques qu'en cône-plateau, sauf pour de très faibles entrefers. Un avantage notable de la géométrie à disques parallèles est que le taux de cisaillement peut être ajusté indépendamment via Ω ou h. Broyer et Macosko (1975) [63] ont utilisé de faibles valeurs de h pour repousser la rupture de bord à des taux de cisaillement plus élevés que ceux accessibles en cône-plateau.

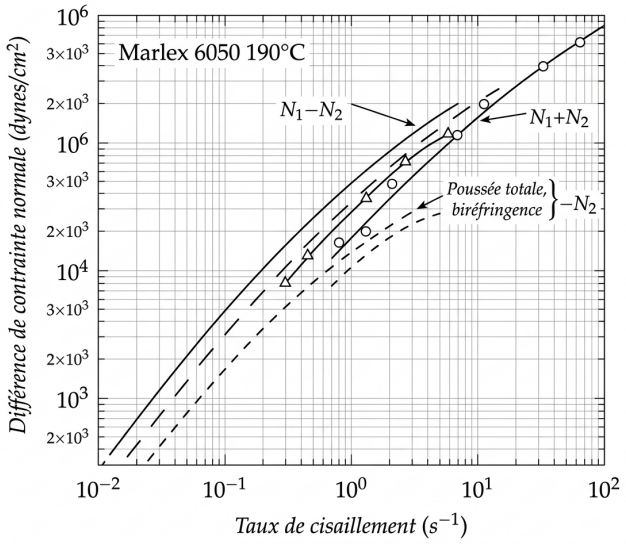


FIG. 26: Différences de contraintes normales pour un polyéthylène haute densité (Marlex 6050) à 190 °C. Poussée totale entre disques parallèles (trait plein) : $N_1 - N_2$; cône-plateau (tirets) : N_1 et leur différence $-N_2$. Données tirées de Macosko [64, 65]. Biréfringence en cône-plateau (triangles) : N_1, et en écoulement dans une fente (cercles) : $N_1 + N_2$, et leur différence (tirets fins) : $-N_2$. Données de Wales [66, 67].

Des données précises peuvent être obtenues avec la géométrie à disques parallèles. La Figure 26 présente des données de poussée totale pour $N_1 - N_2$, calculées via l'équation (4.134). On constate un bon accord entre N_2 obtenu par la différence disques parallèles/cône-plateau et par les études de biréfringence.

4.4.2 Rhéométrie de Cisaillement : Écoulements Entraînés par Pression

L'eau dans le tube, lorsqu'elle rencontre la résistance
de la paroi, ne peut se déplacer comme un cylindre solide.
Le filet central doit s'écouler bien plus vite que le filet extérieur.

G. H. L. Hagen (1839)

Les premières mesures de viscosité ont été effectuées à l'aide d'un petit tube droit ou capillaire (Figure 27). Hagen (1839) [68] en Allemagne et, indépendamment, Poiseuille (1840) [69] en France utilisèrent des capillaires de faible diamètre pour mesurer la viscosité de l'eau. Un développement clé qui rendit leurs travaux possibles fut l'avènement de tubes de précision à alésage étroit. Pour l'eau, l'utilisation de tubes de plus grand diamètre conduit généralement à un écoulement turbulent. La précision est indispensable, comme nous le verrons, car le rayon du tube intervient à la puissance quatre dans l'équation de la viscosité.

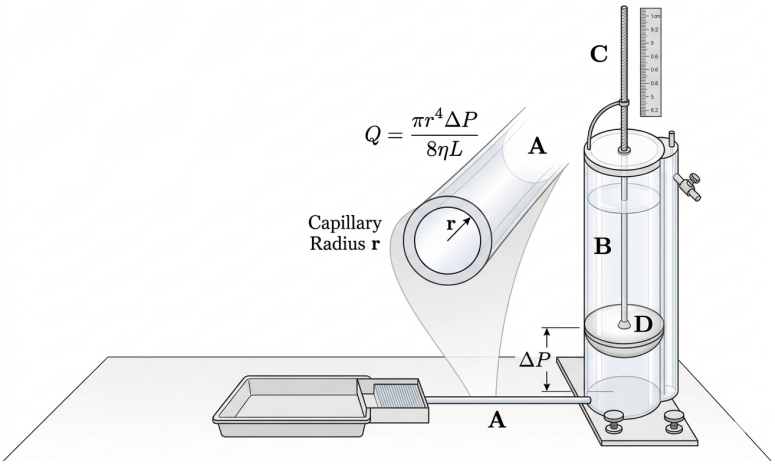


FIG. 27: Tube capillaire de Hagen. Le tube capillaire (A) était alimenté en eau depuis le réservoir (B). La pression était enregistrée par un indicateur (C) relié au flotteur (D), et le débit était vérifié en pesant l'effluent.

Un rhéomètre capillaire est un dispositif à écoulement entraîné par pression, par opposition aux écoulements par entraînement visqueux évoqués précédemment. Comme l'avait observé Hagen le premier, lorsque la pression pousse un fluide dans un canal, la vitesse est maximale au centre. Le gradient de vitesse, ou taux de cisaillement, ainsi que la déformation de cisaillement, sont maximaux à la paroi et nuls au centre. Ainsi, tous les écoulements entraînés par pression sont *non homogènes*, ce qui signifie qu'ils ne permettent de mesurer que les fonctions de cisaillement en régime *permanent* : la viscosité et les coefficients de contraintes normales $\eta(\dot{\gamma})$, $\psi_1(\dot{\gamma})$ et $\psi_2(\dot{\gamma})$.

Si les rhéomètres à écoulement pressurisé ne mesurent que les fonctions de cisaillement permanent, pourquoi sont-ils si largement utilisés ? La première raison est qu'ils sont relativement peu coûteux à fabriquer et simples à utiliser. Malgré cette simplicité, les longs capillaires peuvent fournir les données de viscosité les plus précises disponibles. Un second avantage majeur réside dans l'absence de surface libre dans la zone de mesure, ce qui évite les effets de bord qui limitent sévèrement le taux de cisaillement maximal dans les instruments rotatifs. En effet, pour les fondus de polymères visqueux, les rhéomètres capillaires ou à fente semblent être les seuls moyens satisfaisants d'obtenir des données à des taux de cisaillement supérieurs à $10\ \text{s}^{-1}$. Ils éliminent également l'évaporation du solvant et d'autres problèmes qui affectent les dispositifs rotatifs à surface libre. De plus, comme l'échantillon s'écoule à travers un capillaire ou une fente, ces rhéomètres peuvent être facilement adaptés aux mesures en ligne.

4.4.2.1 Rhéomètre Capillaire

Le capillaire fut le premier rhéomètre, et ce dispositif demeure à ce jour la méthode la plus répandue pour mesurer la viscosité. Les caractéristiques principales de l'instrument sont illustrées en Figure 28. La gravité, un gaz comprimé ou un piston est utilisé pour générer une pression sur le fluide contenu dans un réservoir. Un tube capillaire de rayon R et de longueur L est raccordé au bas du réservoir. La chute de pression et le débit à travers ce tube permettent de déterminer la viscosité.

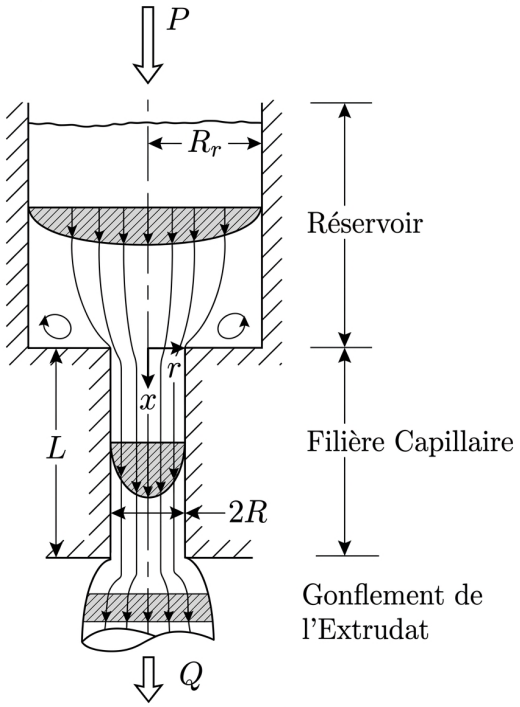


FIG. 28: Schéma d'un rhéomètre capillaire.

Pour établir la relation de viscosité, les hypothèses importantes sont les suivantes :

1. Écoulement pleinement développé, permanent, isotherme et laminaire.
2. Absence de vitesse dans les directions r et θ.
3. Pas de glissement à la paroi : $v_x = 0$ en $r = R$.
4. Le fluide est incompressible, avec une viscosité indépendante de la pression.

Sous ces hypothèses, l'équation du mouvement dans la direction x en coordonnées cylindriques se réduit à :

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{r}\frac{\partial (r\tau_{rx})}{\partial r} \tag{4.135}$$

Étant donné que $\partial p/\partial x$ doit être constant pour un écoulement incompressible pleinement développé, on peut intégrer pour obtenir la distribution de la contrainte de cisaillement :

$$\tau_{rx} = \frac{r}{2}\frac{p_c}{L} \tag{4.136}$$

où p_c est la chute de pression dans le capillaire. À la paroi, la contrainte de cisaillement est

$$(\tau_{rx})_{r=R} = \tau_w = \frac{R}{2}\frac{p_c}{L} \tag{6.2.3}$$

et

$$\tau_{12} = \tau_{rx} = \frac{r}{R}\tau_w \tag{6.2.4}$$

Les dérivations des équations qui suivent sont données dans les sections suivantes.

Taux de cisaillement

Habituellement, on mesure le débit volumique Q, mais pour calculer la viscosité, on a besoin du taux de cisaillement $dv_x/dr = \dot{\gamma}$. Q est lié à v_x par

$$Q = 2\pi \int_0^R v_x(r)\, r\, dr \tag{6.2.5}$$

Une intégration par parties et l'hypothèse de non-glissement donnent

$$Q = -\pi \int_0^R r^2 \left(\frac{dv_x}{dr}\right) dr \tag{6.2.6}$$

Le taux de cisaillement dv_x/dr apparaît donc sous l'intégrale. Pour le faire sortir, on change la variable r en τ. D'après l'équation (6.2.4), $dr = R/\tau_w\, d\tau_{12}$. En substituant r et dr, on obtient

$$\frac{Q\tau_w^3}{\pi R^3} = -\int_0^{\tau_w} \tau_{12}^2 \left(\frac{dv_x}{dr}\right) d\tau_{12} \tag{6.2.7}$$

Puis en dérivant par rapport à τ_w, il vient

$$\frac{3\tau_w^2 Q}{\pi R^3} + \frac{\tau_w^3}{\pi R^3}\frac{dQ}{d\tau_w} = -\tau_w^2 \left.\frac{dv_x}{dr}\right|_{\tau_w} \tag{6.2.8}$$

Après réarrangement, on obtient l'équation de Weissenberg–Rabinowitsch

$$-\left.\frac{dv_x}{dr}\right|_{\tau_w} = \dot{\gamma}_w = \frac{1}{4}\dot{\gamma}_{aw}\left[3 + \frac{d\ln Q}{d\ln \tau_w}\right] \tag{6.2.9}$$

Dans l'analyse de la rhéométrie capillaire, la détermination de la contrainte de cisaillement à la paroi τ_w constitue la première étape fondamentale. Elle est calculée à partir de la chute de pression P_c enregistrée sur la longueur L du capillaire de rayon R selon la relation suivante :

$$\tau_w = \frac{R}{2}\frac{P_c}{L} \tag{4.137}$$

Parallèlement, on définit le taux de cisaillement apparent à la paroi $\dot{\gamma}_{aw}$, qui correspond au flux volumétrique Q rapporté à la géométrie du tube sans correction pour le comportement non-newtonien du fluide :

$$\dot{\gamma}_{aw} = \frac{4Q}{\pi R^3} \tag{4.138}$$

Pour obtenir une valeur physiquement exacte du taux de cisaillement réel $\dot{\gamma}_w$, il est nécessaire d'appliquer la correction de Weissenberg-Rabinowitsch. Cette correction prend en compte la variation locale de la viscosité en fonction du gradient de vitesse :

$$\dot{\gamma}_w = \frac{1}{4}\dot{\gamma}_{aw}\left[3 + \frac{d\ln Q}{d\ln P_c}\right] \tag{4.139}$$

Dans le cas spécifique d'un fluide obéissant à une loi de puissance (modèle d'Ostwald-de Waele), cette expression se simplifie en introduisant l'indice d'écoulement n :

$$\dot{\gamma}_w = \frac{1}{4}\dot{\gamma}_{aw}\left[3 + \frac{1}{n}\right] \tag{4.140}$$

Pour des besoins de simplification pratique, on peut utiliser un taux de cisaillement représentatif où la viscosité apparente rejoint la viscosité réelle à $\pm 2\%$ près. Cette approximation est valide lorsque $\dot{\gamma} = 0.83\dot{\gamma}_a$ et que la pente logarithmique du débit par rapport à la pression est comprise entre 0.2 et 1.3 :

$$0.2 < \frac{d\ln Q}{d\ln P_c} < 1.3 \tag{4.141}$$

Enfin, l'élasticité du matériau peut être approchée par l'étude du premier écart de contraintes normales $(T_{11} - T_{22})$. Bien que non rigoureuse, l'estimation repose sur le rapport de gonflement de l'extrudat B, où D_e est le diamètre de sortie :

$$(T_{11} - T_{22})^2 = 8\tau_w^2(B^6 - 1) \tag{4.142}$$

avec le paramètre empirique de gonflement défini par :

$$B = \frac{D_e}{2R} - 0.13 \tag{4.143}$$

Malgré les erreurs potentielles liées au glissement à la paroi, à la rupture de flux ou aux effets thermiques ($Na \geq 1$), ce système reste le rhéomètre le plus précis pour caractériser les fluides à hauts taux de cisaillement en régime permanent.

Le taux de cisaillement apparent à la paroi, noté $\dot{\gamma}_{aw}$, correspond à la valeur théorique calculée sous l'hypothèse d'un comportement Newtonien. Il lie le débit volumique Q au rayon R du capillaire selon :

$$\dot{\gamma}_{aw} = \frac{4Q}{\pi R^3} \tag{4.144}$$

Puisque la contrainte et le taux de cisaillement sont définis au même point (la paroi), la viscosité réelle η peut être déduite des mesures expérimentales de Q et de la chute de pression p_c. Si le jeu de données permet d'évaluer la pente locale $1/n' = d\ln Q/d\ln p_c$, on obtient l'expression suivante :

$$\eta = \frac{\tau_w}{\dot{\gamma}_w} = \frac{\pi R^4 p_c}{2QL}\left(\frac{n'}{3n'+1}\right) \tag{4.145}$$

L'ajustement des données expérimentales par la correction de Weissenberg-Rabinowitsch permet de passer des grandeurs apparentes aux grandeurs réelles. Sur une représentation logarithmique, cet ajustement se traduit par un glissement des points de mesure le long d'une droite de pente -1, comme le montre la Figure 29. Bien que la dérivation numérique nécessaire à cette méthode soit parfois délicate, elle permet d'obtenir une signature rhéologique précise du fluide.

Pour s'affranchir de la complexité des calculs de dérivées, une méthode d'approximation a été proposée par Schümmer [70, 71]. Elle repose sur l'existence d'un point invariant situé à $r/R = 0,83$ où les taux de cisaillement réel et apparent convergent. Cette approche permet d'estimer la viscosité réelle par une simple équivalence directe :

$$\eta(\dot{\gamma}_w) \approx \eta_a(\dot{\gamma}_{aw}) \quad \text{pour} \quad \dot{\gamma}_w = 0,83\,\dot{\gamma}_{aw} \tag{4.146}$$

Ce résultat est démontré dans l'Exemple suivant. La Figure 29 illustre comment cette conversion simplifiée décale les données. Laun [72, 73] rapporte que cette méthode à point unique pour corriger la viscosité est aussi précise que la méthode de Weissenberg–Rabinowitsch. Il a validé cette approche avec des géométries capillaires et en fente (*slit*), sur plusieurs polymères fondus et en solution.

Exemple — Conversion simplifiée de la viscosité apparente à la viscosité vraie

Montrer que pour un fluide en loi de puissance s'écoulant dans un capillaire, lorsque la viscosité apparente (newtonienne) est évaluée en $\dot{\gamma}_{aw}$, elle donne la viscosité vraie à $0{,}83\,\dot{\gamma}_{aw}$. Estimer la précision de cette

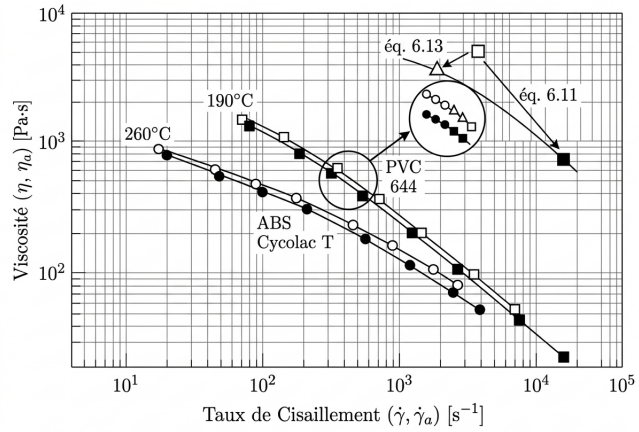


FIG. 29: Représentation du décalage des points de données (viscosité en fonction du taux de cisaillement) suite à l'application de la correction de Weissenberg-Rabinowitsch sur un graphique log-log.

approximation.

Solution :
Pour tout fluide, la contrainte de cisaillement varie linéairement avec le rayon capillaire (éq. (4.136)). Pour un fluide newtonien, le taux de cisaillement est également linéaire en r^*, où $r^* = r/R$:

$$\dot{\gamma}_a = \frac{\tau_{rz}}{\eta_o} = r^* \, \dot{\gamma}_{aw} \tag{4.147}$$

tandis que pour un fluide en loi de puissance, il croît en $r^{*1/n}$:

$$\dot{\gamma} = \left(\frac{\tau_{rz}}{m}\right)^{1/n} = r^{*1/n} \, \dot{\gamma}_w \tag{4.148}$$

Ces deux fonctions se croisent en r_c^*, comme illustré sur la Figure 30. En égalisant les équations (4.147) et (4.148) et en substituant $\dot{\gamma}_w$ à partir de l'équation (6.2.9), on obtient :

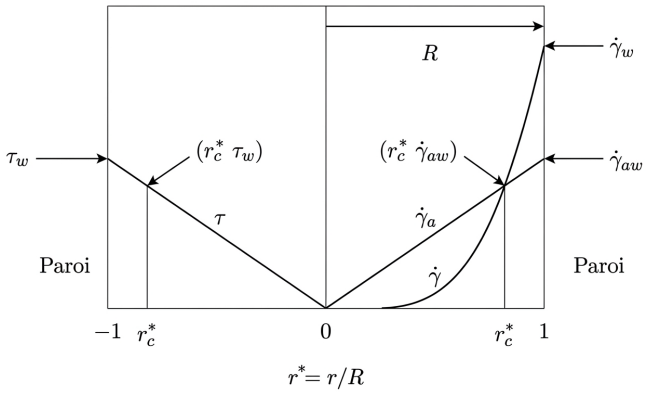


FIG. 30: Contrainte de cisaillement (τ_w, éq. 6.2.2), taux de cisaillement apparent ($\dot{\gamma}_a$, éq. (4.147)) et taux de cisaillement en loi de puissance ($\dot{\gamma}$, éq. (4.148) avec $n = 0{,}3$) tracés en fonction du rayon capillaire adimensionnel $r^* = r/R$. Adapté de [72].

$$\dot{\gamma}_a(r_c^*) = \dot{\gamma}(r_c^*) \tag{4.149}$$

$$r_c^* \, \dot{\gamma}_{aw} = r_c^{*1/n} \, \dot{\gamma}_{aw} \left(\frac{3n+1}{4n}\right) \tag{4.150}$$

$$r_c^* = \left(\frac{4n}{3n+1}\right)^{n/(1-n)} \tag{4.151}$$

On constate que r_c^* varie de $0{,}77$ à $0{,}88$ dans la plage habituelle de n. En supposant une valeur constante de r_c^*, l'erreur sur la viscosité s'exprime par :

$$\frac{\Delta\eta}{\eta} = (n-1)\left[r_c^*\left(\frac{3+1/n}{4}\right)^{n/(1-n)} - 1\right] \tag{4.152}$$

Les erreurs correspondantes sont tracées pour plusieurs valeurs de r_c^* sur la Figure **??**b. Pour $r_c^* = 0{,}83$, l'erreur sur la viscosité est inférieure à $2\,\%$ pour $0{,}2 < n < 1{,}3$.

4.5 Exercice

Exercice 1

Les données suivantes de contrainte de cisaillement en fonction du taux de cisaillement ont été obtenues pour une solution aqueuse de polymère à 291 K.

$\dot{\gamma}(s)$	$\tau(Pa)$	$\dot{\gamma}(s)$	$\tau(Pa)$
0.14	0.12	4.43	3.08
0.176	0.14	5.57	3.79
0.222	0.17	7.02	4.68
0.28	0.21	8.83	5.41
0.352	0.28	11.12	6.53
0.443	0.35	14	8.11
0.557	0.446	17.62	9.46
0.702	0.563	22.2	11.50
0.883	0.69	27.9	13.5
1.11	0.85	35.2	16.22
1.4	1.08	44.3	18.92
1.76	1.31	55.7	22.10
2.22	1.63	70.2	26.13
2.8	2.01	88.3	30
3.52	2.53	111.2	34.8

1- Tracer la courbe d'écoulement sur des coordonnées logarithmiques-logarithmiques.

2- Le modèle de loi puissance peut-il s'adapter à ces données sur toute la plage ? Quelles sont les valeurs de k et de n ?

3- Est-ce que le modèle de d'Ellis peut mieux s'adapter à ces données que le modèle de loi puissance ? Évaluer les valeurs de μ_0, $\tau_{\frac{1}{2}}$ et α. On donne :

$$\mu = \frac{\mu_0}{1 + \left(\frac{\tau}{\tau_{\frac{1}{2}}}\right)^{\alpha-1}}$$

Exercice 2

Les données de cisaillement stationnaire suivantes ont été rapportées pour une solution polymère à 298 K

0.205	0.280	0.377	0.510	0.692	0.944	1.29	1.582	1.77	2.17	2.43
49.69	51.94	54.46	56.44	59.02	61.93	65.48	68.07	70.0	71.6	73.85

Évaluez les paramètres du modèle pour les équations suivantes :

1- Loi puissance

2- Modèle plastique de Bingham

3- Modèle de Casson

4- Modèle de Herschel–Bulkley

Chapitre 5

Théorie de la similitude

L'étude des écoulements de fluides fait face à des équations fondamentales souvent difficiles à résoudre analytiquement. Les solutions numériques, bien que possibles, peuvent être lourdes et coûteuses en temps de calcul. Dans ce contexte, deux approches complémentaires s'avèrent essentielles : l'analyse dimensionnelle et la théorie de la similitude. Ces méthodes permettent de réduire le nombre d'expériences nécessaires, de formuler des corrélations semi-empiriques et de transposer les résultats obtenus sur maquettes aux cas réels (prototypes). L'analyse dimensionnelle repose sur un principe fondamental de la physique : toute formulation d'un phénomène physique doit être dimensionnellement homogène, c'est-à-dire indépendante du système d'unités choisi. La théorie de la similitude, quant à elle, établit les conditions nécessaires pour que les résultats expérimentaux obtenus sur un modèle réduit puissent être extrapolés au système réel.

5.1 Fondements de l'Analyse Dimensionnelle

5.1.1 Le Théorème de Vaschy-Buckingham

Le théorème de Vaschy-Buckingham, également appelé théorème des π, constitue le fondement mathématique de l'analyse dimensionnelle.

Énoncé du théorème :

Toute grandeur physique G, fonction de p paramètres indépendants x_i mesurés par q unités fondamentales (masse M, longueur L, temps T, température Θ pour les problèmes de thermomécanique), s'exprime par une relation de la forme :

$$\frac{G}{x_1^{g_1} x_2^{g_2} \cdots x_q^{g_q}} = F(\pi_{q+1}, \pi_{q+2}, \ldots, \pi_p) \tag{5.1}$$

où les π_i sont des nombres sans dimension construits à partir des paramètres x_i.

Cette relation peut également s'écrire sous forme implicite :

$$F(\pi, \pi_{q+1}, \pi_{q+2}, \ldots, \pi_p) = 0 \tag{5.2}$$

où π représente le nombre sans dimension caractéristique du phénomène :

$$\pi = \frac{G}{x_1^{g_1} x_2^{g_2} \cdots x_q^{g_q}} \tag{5.3}$$

Corollaire : Si un phénomène physique dépend de p paramètres indépendants mesurés par q unités fondamentales, ce phénomène peut être décrit par une fonction implicite de $(p - q + 1)$ nombres sans dimension.

5.1.2 Justification du Théorème

Pour les problèmes de thermomécanique, $q = 4$ car les unités fondamentales sont : la longueur L, la masse M, le temps T et la température Θ. La grandeur physique G s'exprime dimensionnellement par :

$$[G] = L^{\ell} M^{m} T^{t} \Theta^{\theta} \tag{5.4}$$

et chaque paramètre x_i par :

$$[x_i] = L^{\ell_i} M^{m_i} T^{t_i} \Theta^{\theta_i} \tag{5.5}$$

L'hypothèse de base est que G peut être représentée par une série polynômiale :

$$G = \sum_{n} k_n G_n \tag{5.6}$$

avec :

$$G_n = x_1^{e_{1n}} x_2^{e_{2n}} \cdots x_p^{e_{pn}} \tag{5.7}$$

Le principe d'homogénéité dimensionnelle impose que pour chaque monôme d'ordre n :

$$\begin{cases} \ell = \sum_{i=1}^{p} \ell_i e_{in} \\ m = \sum_{i=1}^{p} m_i e_{in} \\ t = \sum_{i=1}^{p} t_i e_{in} \\ \theta = \sum_{i=1}^{p} \theta_i e_{in} \end{cases} \tag{5.8}$$

Ce système de q équations à p inconnues ne peut être résolu que pour q des exposants e_i, en fonction des $(p - q)$ autres exposants. La condition de résolution est que les q premiers paramètres soient dimensionnellement indépendants :

$$\begin{vmatrix} \ell_1 & \ell_2 & \ell_3 & \ell_4 \\ m_1 & m_2 & m_3 & m_4 \\ t_1 & t_2 & t_3 & t_4 \\ \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 & \theta_4 \end{vmatrix} \neq 0 \tag{5.9}$$

5.1.3 Méthodologie d'Application

L'application de l'analyse dimensionnelle suit une démarche systématique :

1. **Dresser la liste** de toutes les variables x_i caractérisant le phénomène physique G
2. **Écrire l'équation aux dimensions** de chacune des variables en fonction des q unités fondamentales
3. **Déterminer** π, le nombre de produits sans dimension caractérisant le problème : $\pi = p - q$
4. **Choisir** π **variables** dimensionnellement indépendantes parmi les variables primaires
5. **Former les** $(\pi + 1)$ **produits** en combinaison avec les π variables non primaires
6. **Formuler la relation** entre les $(\pi + 1)$ produits trouvés

5.2 Exemple d'Application : Machine Traversée par un Gaz

5.2.1 Définition du Problème

Considérons l'évolution d'un gaz à travers une machine (ventilateur, compresseur ou turbine) et recherchons l'expression de la pression de sortie P_s en fonction des paramètres ayant une influence sur cette grandeur.

L'analyse physique montre que les paramètres suivants influencent P_s :

- La pression d'entrée P_e
- La nature du fluide : γ_g (rapport des capacités thermiques), μ (viscosité dynamique), ρ (masse volumique)
- La vitesse de rotation N (ou vitesse périphérique v_e)
- La taille de la machine : diamètre $\varnothing$
- Le débit massique $\dot{m}$

Ainsi : $p = 7$ paramètres et $q = 3$ unités fondamentales (M, L, T).

5.2.2 Tableau Dimensionnel

Paramètres	M	L	T	Exposants e_i
P_s	1	-1	-2	-
P_e	1	-1	-2	e_1
ρ	1	-3	0	e_2
$\dot{m}$	1	0	-1	e_3
γ_g	0	0	0	e_4
v_e	0	1	-1	e_5
$\varnothing$	0	1	0	e_6
μ	1	-1	-1	e_7

TAB. 1: Analyse dimensionnelle des paramètres

5.2.3 Résolution du Système

Le respect des conditions dimensionnelles s'écrit :

$$\begin{cases} m: & 1 = e_1 + e_2 + e_3 + e_7 \\ \ell: & -1 = -e_1 - 3e_2 + e_5 + e_6 - e_7 \\ t: & -2 = -2e_1 - e_3 - e_5 - e_7 \end{cases} \tag{5.10}$$

La résolution donne :

$$\begin{cases} e_1 = -\frac{1}{4}(3m + \ell + 3t + 2e_5 - e_6 + e_7) = 1 \\ e_2 = \frac{1}{4}(m - \ell + t + 2e_5 + e_6 - e_7) = 0 \\ e_3 = \frac{1}{2}(3m + \ell + t - e_6 - e_7) = 0 \end{cases} \tag{5.11}$$

5.2.4 Formulation Adimensionnelle

La relation générale s'écrit :

$$\frac{P_s}{P_e} = \sum_n k_n \left[\gamma_g^{e_{4n}} \left(\frac{v_e}{\sqrt{P_e/\rho}} \right)^{e_{5n}} \left(\frac{\varnothing \sqrt[4]{\rho P_e}}{\dot{m}} \right)^{e_{6n}} \left(\frac{\mu}{\dot{m} \sqrt[4]{P_e/\rho}} \right)^{e_{7n}} \right] \tag{5.12}$$

Ou sous forme formelle :

$$\frac{P_s}{P_e} = F \left(\gamma_g, \frac{v_e}{\sqrt{P_e/\rho}}, \frac{\varnothing \sqrt[4]{\rho P_e}}{\dot{m}}, \frac{\mu}{\dot{m} \sqrt[4]{P_e/\rho}} \right) \tag{5.13}$$

5.2.5 Nombres Sans Dimension Classiques

En combinant ces groupements, on obtient les nombres sans dimension d'usage courant :
Nombre de Mach :

$$Ma = \frac{v_e}{\sqrt{\gamma_g P_e/\rho}} = \frac{v_e}{v_s} \tag{5.14}$$

Nombre de Reynolds :

$$Re = \frac{\rho v_e \varnothing}{\mu} \tag{5.15}$$

Coefficient de débit de Rateau :

$$\delta_R = \frac{\dot{m}}{\rho \varnothing^2 v_e} = \frac{\dot{V}}{N \varnothing^3} \tag{5.16}$$

La relation finale devient :

$$\frac{P_s}{P_e} = F(\gamma_g, Ma, Re, \delta_R) \tag{5.17}$$

5.3 Théorie de la Similitude

5.3.1 Mise en Évidence des Écoulements Semblables

5.3.1.1 Équation de Navier-Stokes Adimensionnelle

Pour un fluide pesant incompressible en écoulement en charge, l'équation de Navier-Stokes s'écrit :

$$\frac{Dv_i}{dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P^*}{\partial x_i} + \frac{\mu}{\rho}\nabla^2 v_i \tag{5.18}$$

où $P^* = P + \rho g z$ est la pression piézométrique.
Introduisons des variables réduites (sans dimension) :

$$x_i' = \frac{x_i}{D}, \quad v_i' = \frac{v_i}{V}, \quad t' = \frac{Vt}{D}, \quad P^{*'} = \frac{P^*}{P^*_{ref}} \tag{5.19}$$

où D est une dimension caractéristique et V une vitesse de référence.
L'équation de Navier-Stokes adimensionnelle devient :

$$\frac{Dv_i'}{dt'} = -Eu\frac{\partial P^{*'}}{\partial x_i'} + \frac{1}{Re}\nabla^2 v_i' \tag{5.20}$$

avec :

$$Re = \frac{\rho V D}{\mu} \quad \text{(nombre de Reynolds)} \tag{5.21}$$

$$Eu = \frac{P^*_{ref}}{\rho V^2} \quad \text{(nombre d'Euler)} \tag{5.22}$$

5.3.1.2 Conditions de Similitude

Deux écoulements ayant les mêmes nombres de Reynolds et d'Euler, et qui ont la même pression réduite pour des coordonnées réduites et un temps réduit identiques, ont les mêmes champs de vitesses réduites : **ils sont semblables**.

5.3.2 Conditions Générales de Similitude

5.3.2.1 Similitude Géométrique

La maquette est géométriquement semblable au prototype si :

$$x_{im} = k_d x_{ip} \tag{5.23}$$

où k_d est l'échelle des distances (échelle géométrique), constante en tout point et dans toutes les directions.

5.3.2.2 Similitude Cinématique

Les écoulements sont cinématiquement semblables si :

$$v_{im} = k_v v_{ip} \tag{5.24}$$

où k_v est l'échelle des vitesses, constante en tout point homologue.
La condition cinématique de similitude relie les échelles :

$$\frac{k_v k_t}{k_d} = 1 \quad \Rightarrow \quad k_t = \frac{k_d}{k_v} \tag{5.25}$$

L'échelle des accélérations est :

$$k_\gamma = \frac{k_v}{k_t} = \frac{k_d}{k_t^2} = \frac{k_v^2}{k_d} \tag{5.26}$$

5.3.2.3 Similitude Dynamique

La relation fondamentale de Newton impose :

$$k_F = k_m k_\gamma = k_\rho k_d^3 \cdot \frac{k_v^2}{k_d} = k_\rho k_d^2 k_v^2 = \frac{k_\rho k_d^4}{k_t^2} \tag{5.27}$$

Pour les forces volumiques :

$$k_{Fv} = \frac{k_\rho k_v^2}{k_d} = \frac{k_\rho k_d}{k_t^2} = k_\rho k_\gamma \tag{5.28}$$

5.4 Nombres Sans Dimension Principaux

5.4.1 Nombre d'Euler

L'identité des échelles des forces de pression et des forces d'inertie conduit au **nombre d'Euler** :

$$Eu = \frac{P}{\rho v^2} \tag{5.29}$$

Pour un gaz parfait, avec $v_s = \sqrt{\gamma_g P/\rho}$, le nombre d'Euler s'exprime en fonction du **nombre de Mach** :

$$Eu = \frac{1}{Ma^2 \gamma_g} \quad \text{avec} \quad Ma = \frac{v}{v_s} \tag{5.30}$$

Condition de similitude : $Eu_m = Eu_p$ ou $Ma_m = Ma_p$ (pour même γ_g)

5.4.2 Nombre de Froude

L'identité des échelles des forces de gravité et des forces d'inertie définit le **nombre de Froude** :

$$Fr = \frac{v}{\sqrt{gD}} \tag{5.31}$$

qui mesure le rapport entre les forces d'inertie et les forces de gravité.
Condition de similitude : $Fr_m = Fr_p$

5.4.3 Nombre de Reynolds

L'identité des échelles des forces de viscosité et des forces d'inertie donne le **nombre de Reynolds** :

$$Re = \frac{\rho v D}{\mu} = \frac{vD}{\nu} \tag{5.32}$$

où $\nu = \mu/\rho$ est la viscosité cinématique.
Condition de similitude : $Re_m = Re_p$

5.4.4 Nombre de Weber

Pour les écoulements où les forces de tension superficielle sont importantes :

$$We = \frac{\rho v^2 D}{\sigma} \tag{5.33}$$

où σ est la tension superficielle.
Condition de similitude : $We_m = We_p$

5.4.5 Nombre de Grashof

En convection naturelle, l'identité des forces de poussée d'Archimède et des forces visqueuses définit le **nombre de Grashof** :

$$Gr = \frac{\ell^3 g \beta \Delta T}{\nu^2} \tag{5.34}$$

où β est le coefficient de dilatation volumique.
Condition de similitude : $Gr_m = Gr_p$
Le **nombre de Rayleigh** combine Grashof et Prandtl :

$$Ra = Gr \cdot Pr = \frac{\ell^3 \rho^2 c_p g \beta \Delta T}{\mu \lambda} \tag{5.35}$$

5.5 Similitude Énergétique

5.5.1 Équation de l'Énergie

L'équation de l'énergie pour un fluide s'écrit :

$$\int_V \rho c_p \frac{DT}{dt} dV = \int_V \left[T\beta \frac{DP}{dt} + \Phi \right] dV + \int_\Omega \lambda \nabla T \cdot \vec{n} d\Omega + \int_{\Omega'} h_c \Delta T d\Omega' \tag{5.36}$$

où Φ est la fonction de dissipation et h_c le coefficient de convection.

5.5.2 Nombre d'Eckert

L'identité des échelles d'énergie interne et d'énergie de pression conduit au **nombre d'Eckert** :

$$Ec = \frac{c_p T}{v^2} \tag{5.37}$$

qui mesure le rapport entre l'énergie interne et l'énergie cinétique.
Condition de similitude : $Ec_m = Ec_p$
Pour un gaz parfait ($P/\rho = RT/M$), la similitude impose :

$$\frac{c_{pm}}{c_{pp}} = \frac{M_p}{M_m} \tag{5.38}$$

5.5.3 Nombre de Prandtl

L'identité des échelles d'énergie interne et d'énergie transmise par conduction définit le **nombre de Prandtl** :

$$Pr = \frac{\mu c_p}{\lambda} = \frac{\nu}{a} \tag{5.39}$$

où $a = \lambda/(\rho c_p)$ est la diffusivité thermique. Le nombre de Prandtl représente le rapport entre la diffusivité de quantité de mouvement et la diffusivité thermique.

5.5.4 Nombre de Péclet

Le **nombre de Péclet** combine Reynolds et Prandtl :

$$Pe = Re \cdot Pr = \frac{\rho c_p v D}{\lambda} \tag{5.40}$$

Il représente le rapport entre l'énergie interne transportée et l'énergie transmise par conduction.

5.5.5 Nombre de Nusselt

L'identité des échelles d'énergie transmise par conduction et par convection définit le **nombre de Nusselt** :

$$Nu = \frac{h_c D}{\lambda} \tag{5.41}$$

qui mesure le rapport entre la chaleur convectée à la paroi et la chaleur conduite.

5.5.6 Nombre de Stanton

Le **nombre de Stanton** relie convection et transport :

$$St = \frac{h_c}{\rho c_p v} = \frac{Nu}{Pe} \tag{5.42}$$

5.6 Applications Pratiques et Limitations

5.6.1 Respect des Conditions de Similitude

En pratique, il est souvent impossible de respecter simultanément toutes les conditions de similitude. Par exemple, pour un écoulement de fluide pesant :

- Similitude de Reynolds : $Re_m = Re_p \rightarrow k_\rho k_v k_d = k_\mu$
- Similitude de Froude : $Fr_m = Fr_p \rightarrow k_v^2 = k_g k_d$
- Similitude géométrique : $k_d =$ constante

Ces trois conditions sont rarement compatibles simultanément. Il faut alors identifier les phénomènes dominants et négliger les effets secondaires.

5.6.2 Distorsion Géométrique

Dans certains cas (par exemple, maquettes de ports maritimes), il n'est pas possible de respecter la même échelle dans toutes les directions. On définit alors un **coefficient de distorsion** :

$$\delta = \frac{k_{d\,horizontal}}{k_{d\,vertical}} \tag{5.43}$$

En pratique, on admet $\delta \approx 2$ à 3 au maximum.

5.6.3 Conditions aux Limites et Initiales

La similitude complète nécessite également que les conditions aux limites et initiales respectent toutes les échelles établies, ce qui renforce la complexité de mise en œuvre expérimentale.

5.7 Synthèse des Conditions de Similitude

Le tableau suivant résume les principales conditions de similitude pour les problèmes thermomécaniques :

Type	Échelles de base	Nombres sans dimension	Signification physique
Cinématique	k_d, k_t, k_v	-	$k_t = k_d/k_v$
Dynamique	k_ρ, k_d, k_v	Eu, Ma, Fr, Re, Gr, We	Rapports de forces
Énergétique	k_T, k_ρ, k_v	Ec, Pr, Pe, Nu, St	Transferts d'énergie

TAB. 2: Synthèse des conditions de similitude

L'analyse dimensionnelle et la théorie de la similitude constituent des outils essentiels pour l'ingénieur confronté à l'étude des écoulements de fluides. Le théorème de Vaschy-Buckingham permet de réduire le nombre de paramètres et de formuler des corrélations adimensionnelles applicables à des configurations semblables. La théorie de la similitude établit les conditions rigoureuses pour transposer les résultats de maquettes aux prototypes.

Cependant, l'application pratique se heurte souvent à l'impossibilité de respecter simultanément toutes les conditions de similitude. L'ingénieur doit alors faire preuve de discernement pour identifier les phénomènes dominants et accepter des similitudes partielles, en évaluant les erreurs qui en résultent. La connaissance approfondie des nombres sans dimension et de leur signification physique reste donc indispensable pour toute exploitation judicieuse de résultats expérimentaux.

5.8 Exercices

Exercice 1

Établir une équation donnant la distance parcourue pendant le temps T par un corps en chute libre, en admettant que la distance dépends du poids du corps, de l'accélération de la pesanteur et du temps.

Exercice 2

Établir la relation donnant le nombre de Reynolds en utilisant l'analyse dimensionnelle, sachant qu'il est fonction de la densité ρ, de la viscosité μ, et de la vitesse d'un fluide en écoulement V, en plus d'une longueur caractéristique l.

Exercice 3

Pour un fluide parfait, exprimer le débit volumique Q à travers un orifice à bord mince en fonction de la masse volumique du liquide ρ, du diamètre de l'orifice d, et de la différence de pression Δp.

Exercice 4

Déterminer la pression d'arrêt exercée par l'écoulement d'un fluide incompressible sur un objet immergé, en admettant que cette pression est fonction de la densité et de la vitesse.

Exercice 5

La résistance exercée par un fluide en mouvement sur un corps est fonction de la masse volumique, de la viscosité et de la vitesse du fluide, et d'une longueur caractéristique du corps. Établir l'équation générale.

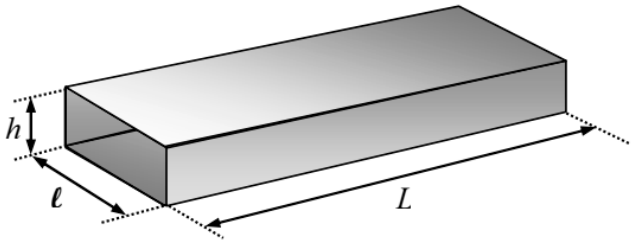
Exercice 6

Une maquette de digue (il s'agit d'une digue "talus"), constituée par un empilement de blocs de béton ayant chacun la masse $m_1 = 1\ kg$, est soumise à la houle produite en laboratoire. Cette maquette ne subit pas de dommages tant que la hauteur h_1 de la houle ne dépasse pas $0.3\ m$. Quelle devra être la masse minimale m_2 des blocs de même béton constituant la digue prototype pour que celle-ci résiste à une houle géométriquement et hydrodynamiquement semblable, et pouvant atteindre une hauteur h_2 de $6\ m$?

Exercice 7

On souhaite prévoir la perte de charge régulière $\Delta p_t/L$ occasionnée par l'écoulement de l'air à la vitesse moyenne V dans une conduite de section rectangulaire $h \times l$. Avant de construire le prototype, on réalise une maquette à l'échelle $\alpha = 1/10$ géométriquement semblable (on respecte le facteur de forme). Le fluide

s'écoulant dans la maquette de la conduite est de l'eau. Dans les deux cas (maquette et prototype) on supposera lisses les parois de la conduite.



1- Donner la liste, en la justifiant, des paramètres nécessaires à la description du problème.

2- Déterminer les produits sans dimension auxquels l'étude peut être ramenée, et en déduire que la perte de charge régulière peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{\Delta p_t}{L} = \frac{\rho V^2}{h}\phi\left(\frac{h}{l}, Re\right) \tag{5.44}$$

ou toute autre forme équivalente.

3- En plus de respecter le facteur de forme, on s'arrange pour avoir une similitude hydrodynamique. En déduire le rapport des vitesses de l'air et de l'eau s'écoulant respectivement dans le prototype et la maquette (donner ce rapport en fonction de α et des masses volumiques et viscosités de l'eau et de l'air).

4- Si on mesure expérimentalement sur la maquette une perte de charge régulière de $7\ Pa\cdot m^{-1}$ pour un débit de $15\ l/s$, quelle est la perte de charge régulière à laquelle on doit s'attendre sur le prototype, et pour quel débit d'air ?

Données : $\rho_{eau} = 1000\ kg/m^3$, $\rho_{air} = 1.2\ kg/m^3$, $\mu_{eau} = 10^{-3}\ Pa\cdot s$, $\mu_{air} = 1.8\times 10^{-5}\ Pa\cdot s$

Exercice 8

On souhaite déterminer la force de traînée D exercée par l'écoulement de l'air sur un avion prototype d'aire frontale S, d'envergure l et susceptible de voler dans l'atmosphère à la vitesse V de $400\ km/h$. Avant de construire le prototype, on réalise une maquette de l'avion afin de la tester en soufflerie, ce qui permettra la mesure expérimentale de la force de traînée D_m exercée par un écoulement de vitesse V_m dans la soufflerie. La maquette est construite à l'échelle $a = 1/10$ tout en respectant le facteur de forme, c'est-à-dire que l'on conserve $S_m/l^2 = S/l^2$. L'air sera toujours supposé incompressible.

1- Faire la liste des variables nécessaires à la description du système. Écrire l'équation aux dimensions de chacune d'elles et en déduire le nombre de produits Π sans dimension qui décrivent ce système. Déterminer chacun de ces produits Π.

2- Donner une expression de la force de traînée D qui soit fonction du facteur de forme, du nombre de Reynolds, et fasse apparaître la masse volumique ρ de l'air, la vitesse V et, soit l'envergure l, soit l'aire frontale S (on supposera que la masse volumique et la viscosité de l'air sont les mêmes dans les conditions réelles et en soufflerie).

3- Quelle doit être la vitesse V_m de l'écoulement généré en soufflerie pour respecter la similitude hydrodynamique (ou similitude de Reynolds) ? Le facteur de forme étant également respecté, quelle relation simple obtient-on entre D et D_m ? La vitesse V_m est-elle compatible avec l'hypothèse d'un fluide incompressible ?

4- Compte tenu des conclusions de la question précédente, on peut contourner l'incompatibilité en jouant sur la masse volumique de l'air utilisé en soufflerie. Considérant l'air comme un gaz parfait, établir une relation entre la masse volumique ρ et la pression p. En déduire la pression qu'il est nécessaire de maintenir en soufflerie pour respecter la similitude hydrodynamique et se limiter à une vitesse $V_m = V$.

4- En déduire une nouvelle relation entre D_m et D. Si l'on mesure expérimentalement sur la maquette une force de traînée $D_m = 4.5\ N$, quelle doit être la puissance minimale de propulsion développée par le moteur de l'avion prototype pour qu'il puisse voler dans l'atmosphère à la vitesse $V = 400km/h$?

Chapitre 6

Théorie de la couche limite

La description macroscopique d'un écoulement impose de considérer l'ensemble des échelles spatiales qui contribuent à sa dynamique. Lorsque la vitesse caractéristique augmente, l'écart entre les échelles dominantes et les échelles fines s'accroît de façon significative. Cette séparation marquée ouvre la voie à une décomposition de l'écoulement en domaines distincts, chacun étant gouverné par des mécanismes physiques spécifiques. Dans le cas d'un écoulement autour d'un profil à nombre de Reynolds élevé, les effets visqueux restent confinés à une région extrêmement localisée au voisinage immédiat de la paroi, tandis que les phénomènes inertiels influencent l'écoulement sur des distances largement supérieures à la taille caractéristique du profil. Cette observation conduit naturellement à une stratégie de modélisation hybride consistant à décrire l'écoulement par les équations d'Euler dans la majeure partie du domaine, à l'exception de la zone proche de la paroi où les effets de viscosité deviennent prépondérants et peuvent être traités à l'aide de l'approximation de la couche limite. La méthode des développements asymptotiques raccordés fournit un cadre mathématique rigoureux pour légitimer cette démarche, bien que son principe soit présenté ici de manière essentiellement qualitative et intuitive.

6.1 Grandes lignes de la théorie de la couche limite

Certains écoulements présentent, à proximité des parois solides, des régions de fort cisaillement caractérisées par une faible épaisseur, appelées *couches limites*. Dans ces zones, les gradients de vitesse sont très élevés et leur intensité augmente avec le nombre de Reynolds. Le cas le plus simple correspond à un écoulement uniforme à l'infini rencontrant un obstacle solide. En raison de la condition d'adhérence à la paroi, la vitesse du fluide est nulle sur l'obstacle et tend vers une valeur U_0 loin de celui-ci. La couche limite, initialement d'épaisseur nulle au bord d'attaque, s'épaissit progressivement le long de la surface solide (voir Fig. 1).

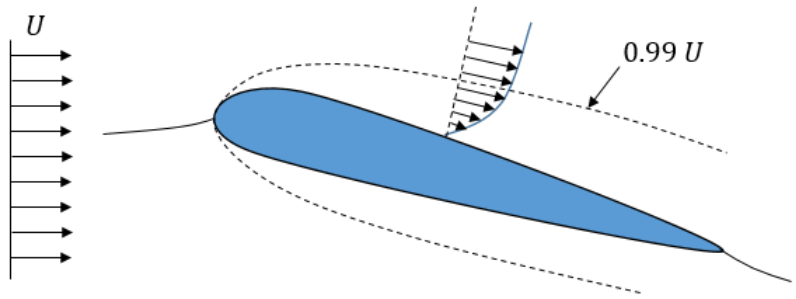


FIG. 1: Couche limite se développant sur le profil d'une aile d'avion. La grandeur U_0 désigne la vitesse de l'écoulement à l'infini, tandis que le tracé en pointillé représente l'épaisseur de la couche limite δ, définie comme la distance à la paroi pour laquelle la vitesse locale atteint $0.99\ U_0$.

Un phénomène analogue apparaît lors de l'écoulement d'un fluide dans la région d'entrée d'un conduit. Toutefois, la présence de parois séparées par une distance finie contraint les couches limites issues des parois opposées à se rejoindre. L'écoulement devient alors pleinement établi. Un autre exemple d'écoulement cisaillé est celui d'un jet libre se propageant dans un fluide initialement au repos (voir Fig. 2). Dès la sortie du jet, une zone de mélange se développe, dont l'extension augmente à mesure que l'on s'éloigne de l'orifice. Le sillage engendré par la présence d'un obstacle solide placé dans un écoulement libre constitue un autre cas typique d'écoulement cisaillé. Dans ces régions, les gradients de vitesse peuvent être particulièrement élevés.

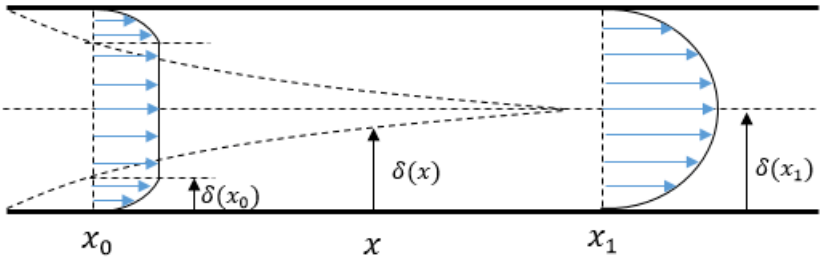


FIG. 2: Couche limite se développant entre deux plans parallèles à l'entrée d'un canal. L'écoulement devient pleinement établi lorsque les couches limites issues de chacune des parois se rejoignent.

La majorité des écoulements rencontrés en pratique correspondent à des nombres de Reynolds élevés. Dans ce régime, les observations expérimentales montrent que l'écoulement peut être décomposé en deux régions distinctes :

- une couche limite adjacente aux parois solides, au sein de laquelle les effets de la viscosité sont prépondérants ;
- une région extérieure à la couche limite, où les effets visqueux sont négligeables et où le fluide peut être assimilé à un fluide parfait.

Dans le cas d'écoulements caractérisés par des nombres de Reynolds très faibles, la région affectée par les effets visqueux est très étendue et tend vers une extension infinie lorsque $Re = 0$. À l'inverse, lorsque $Re \to \infty$, l'épaisseur de la couche limite devient négligeable. Pour des situations intermédiaires, la viscosité n'influence qu'une portion très restreinte du domaine d'écoulement. Cette décomposition en deux régions distinctes permet de traiter les problèmes dits « extérieurs ». L'écoulement est d'abord déterminé en supposant le fluide parfait, avec des conditions de glissement à l'interface, telles que $\mathbf{V} \cdot \mathbf{n} = 0$. Une fois ce champ de vitesse établi, les théories de la couche limite sont appliquées afin de calculer l'épaisseur de déplacement. Le calcul est ensuite réitéré en considérant un obstacle fictif, obtenu en augmentant la géométrie initiale de l'épaisseur de déplacement associée à la couche limite.

6.1.1 Couche limite sur plaque plane

L'approximation proposée par la théorie de la couche limite de Prandtl présente des limites de validité [74]. Sa précision s'améliore progressivement en s'éloignant du point de départ du profil aérodynamique. Dans cette partie, on examine une plaque plane d'un mètre de long soumise à un écoulement d'air parallèle se déplaçant à $0.2\ m/s$. Le régime d'écoulement reste laminaire sur l'ensemble de la plaque. La figure 3 illustre comment la vitesse axiale varie verticalement à vingt centimètres du point de départ. On observe que le profil théorique de Blasius, qui sera déterminé dans les sections suivantes, diffère notablement des résultats obtenus par simulation numérique des équations de Navier-Stokes. Cette simulation numérique représente la solution de référence, à condition de négliger les erreurs liées à la discrétisation spatiale.

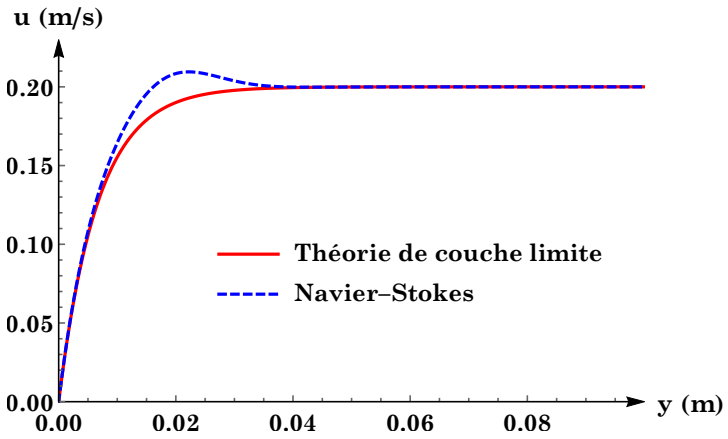


FIG. 3: Profils de vitesse à proximité du bord d'attaque obtenus, d'une part, dans le cadre de l'approximation de Prandtl (en dessous de l'asymptote $u = 0.2$) et, d'autre part, à partir des équations complètes de Navier–Stokes (au-dessus de cette asymptote). On observe une sur-vitesse d'environ 3% près du bord d'attaque dans la configuration réelle.

Le phénomène de survitesse observé près du bord d'attaque s'explique par des considérations physiques : les forces d'inertie jouent un rôle prépondérant et poussent le fluide à suivre des trajectoires rectilignes. Cependant, la présence de la paroi crée des forces visqueuses qui ralentissent progressivement le fluide sur une épaisseur croissante au fur et à mesure qu'on s'éloigne du bord d'attaque. Pour respecter le principe de conservation de la masse, un mouvement vertical ascendant du fluide se produit nécessairement. La combinaison de ces deux phénomènes, l'inertie du fluide et sa composante de vitesse verticale, génère cette accélération locale.

La théorie de Prandtl de la couche limite laminaire apparaît ainsi comme une approximation particulièrement pertinente, offrant un cadre efficace pour l'analyse d'effets couplés tels que la couche limite dynamique liée aux phénomènes thermogravitationnels, à la turbulence, aux ondes de choc, entre autres.

6.1.2 Cavité entraînée

Des simulations numériques sont réalisées sur un second scénario de validation pour capturer l'ensemble des zones de recirculation présentes dans l'écoulement. Ce cas d'étude consiste en une paroi mobile se déplaçant à vitesse constante au-dessus d'une cavité de forme carrée (ou cubique dans sa version tridimensionnelle), dont la hauteur H sert de dimension caractéristique pour déterminer le nombre de Reynolds (voir Fig.4).

Sous l'effet de la viscosité, le fluide est entraîné par la paroi supérieure mobile et s'écoule principalement de gauche à droite le long du couvercle. Au voisinage des parois latérales, l'écoulement est dévié vers le bas, puis se referme à l'intérieur de la cavité, conduisant à une organisation fortement rotationnelle du champ de vitesse. L'écoulement est dominé par un tourbillon principal occupant la région centrale de la cavité. Ce vortex majeur structure l'ensemble de l'écoulement et génère des trajectoires quasi circulaires, clairement mises en évidence par les lignes de courant fermées représentées sur la figure.

En interaction avec ce tourbillon principal, trois zones de recirculation secondaires sont observées. Une recirculation de grande extension se développe dans la partie inférieure de la cavité, traduisant le retour du fluide vers l'amont sous l'effet du mouvement global imposé par le vortex central. Par ailleurs, deux zones de recirculation secondaires apparaissent dans la partie supérieure de la cavité, respectivement près des coins supérieur gauche et supérieur droit. Ces deux structures sont symétriques par rapport à l'axe vertical médian de la cavité et résultent de l'interaction entre l'écoulement entraîné par la paroi mobile et les parois

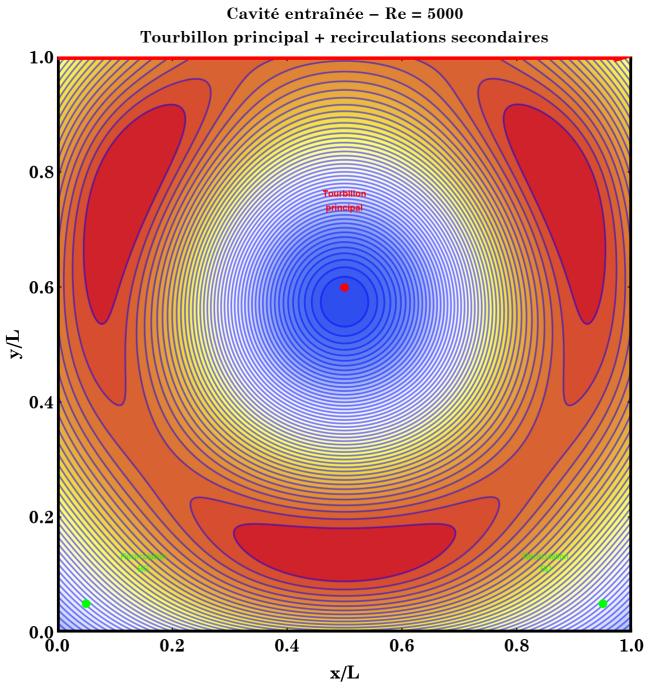


FIG. 4: Écoulement dans une cavité entraînée à $Re = 5000$: formation d'un vortex principal générant des recirculations bidimensionnelles secondaires près des parois fixes, évoluant vers une structure tridimensionnelle à nombre de Reynolds élevé.

latérales fixes. La coexistence d'un vortex principal dominant et de recirculations secondaires localisées met en évidence la complexité de la topologie de l'écoulement dans la cavité entraînée à $Re = 5000$.

6.1.3 Écoulement autour de deux cylindres

Les zones de recirculation observées dans les écoulements fluides ne sont pas nécessairement le résultat d'un équilibre ou d'une compétition entre les effets d'inertie et les forces visqueuses. L'exemple présenté ci-dessous illustre au contraire que de telles structures peuvent apparaître même en régime de Stokes, où l'inertie est négligeable. On considère un écoulement uniforme de fluide visqueux autour de deux cylindres de même diamètre, disposés en alignement avec la direction de l'écoulement incident (Fig. 5).

En régime de Stokes, l'écoulement autour d'un cylindre isolé ne présente aucune zone de recirculation. De telles structures n'apparaissent qu'en présence d'effets inertiels, pour des nombres de Reynolds supérieurs à une valeur critique de l'ordre de 5. Dans le cas de deux cylindres alignés avec la direction de l'écoulement, le comportement de l'écoulement dans les régions externes confirme cette observation. En revanche, lorsque les cylindres sont suffisamment rapprochés, la région interstitielle devient le siège de paires de recirculations stationnaires contrarotatives. La formation de ces structures résulte alors principalement de la distribution de pression et des contraintes visqueuses imposées par la géométrie confinée, indépendamment des effets d'inertie.

À mesure que la distance séparant les deux cylindres diminue, de nouvelles paires de recirculations, d'amplitude décroissante, apparaissent successivement. Dans la limite où les cylindres deviennent tangents le long d'une génératrice, une infinité de recirculations de plus en plus faibles se développe dans la région enfermée par la première cellule tourbillonnaire. Une analyse théorique conduite en régime de Stokes, fondée sur un développement en séries convergentes, permet de corroborer ces observations et de valider les résultats obtenus par calcul numérique. Cet exemple met en évidence que les phénomènes de décollement et de recirculation ne doivent pas être systématiquement attribués aux effets d'inertie, même si ceux-ci

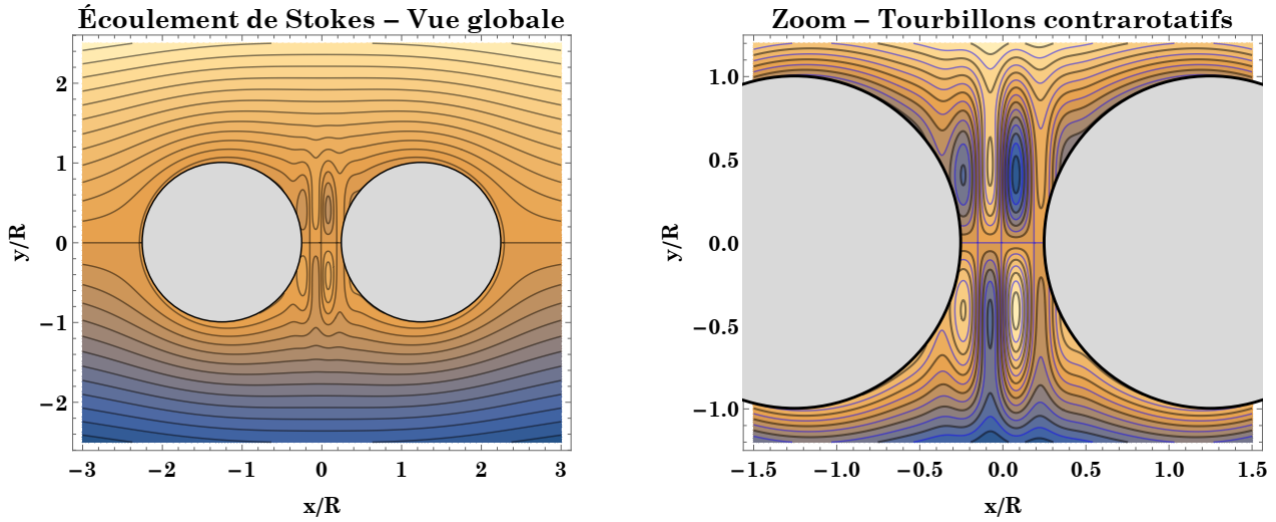


FIG. 5: Écoulement d'un fluide visqueux autour de deux cylindres en régime de Stokes. La configuration met en évidence l'apparition d'une paire de zones de recirculation dans l'espace interstitiel séparant les deux obstacles. À mesure que la distance entre les cylindres diminue, le nombre de paires de recirculations générées dans cette région augmente sans borne, traduisant la richesse de la structure de l'écoulement même en l'absence d'effets inertiels.

favorisent leur apparition dans des configurations géométriques simples, telles que l'écoulement autour d'un cylindre isolé. De tels phénomènes peuvent avoir des conséquences majeures, voire critiques, notamment en aérodynamique, où ils influencent significativement les performances et la stabilité des profils d'aile.

6.2 Estimation de l'épaississeur de la couche limite par analyse dimensionnelle

Il est nécessaire de disposer d'estimations des principaux paramètres physiques afin de justifier les approximations introduites. On s'intéresse tout d'abord à l'épaisseur de la couche limite, que l'on évalue à l'aide d'un raisonnement par analyse dimensionnelle. Les forces d'inertie par unité de volume s'écrivent sous la forme

$$\rho\, u\, \frac{\partial u}{\partial x}. \tag{6.1}$$

Pour une plaque de longueur caractéristique L, le gradient de vitesse longitudinal peut être estimé par

$$\frac{\partial u}{\partial x} \sim \frac{U}{L}, \tag{6.2}$$

où U désigne une vitesse caractéristique de l'écoulement. On obtient alors l'ordre de grandeur suivant pour les forces d'inertie :

$$\rho\, u\, \frac{\partial u}{\partial x} \sim \rho\, \frac{U^2}{L}. \tag{6.3}$$

Considérons maintenant les forces liées aux contraintes visqueuses. Par unité de volume, celles-ci sont associées au terme

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}. \tag{6.4}$$

Dans le cas d'un fluide newtonien, ce terme s'écrit

$$\mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}. \tag{6.5}$$

Si l'on note δ l'épaisseur de la couche limite, une estimation de l'ordre de grandeur des forces visqueuses conduit à

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \sim \mu \frac{U}{\delta^2}. \tag{6.6}$$

Dans la couche limite, les forces d'inertie et les forces de frottement visqueux sont du même ordre de grandeur, ce qui conduit à la relation d'équilibre suivante :

$$\rho \frac{U^2}{L} \sim \mu \frac{U}{\delta^2}. \tag{6.7}$$

On obtient une estimation de l'épaisseur de la couche limite sous la forme :

$$\delta \approx \left(\frac{\mu L}{\rho U}\right)^{1/2} = L \left(\frac{\mu}{\rho U L}\right)^{1/2}. \tag{6.8}$$

Il apparaît ainsi que le rapport entre l'épaisseur de la couche limite et la longueur caractéristique de la plaque est inversement proportionnel à la racine carrée du nombre de Reynolds :

$$\frac{\delta}{L} \approx \mathrm{Re}^{-1/2}. \tag{6.9}$$

En appliquant un raisonnement analogue, il est possible d'évaluer la contrainte de cisaillement exercée par le fluide sur la paroi solide. Celle-ci s'écrit :

$$\tau_w = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{z=0}. \tag{6.10}$$

Le gradient de vitesse à la paroi peut être estimé à l'ordre de grandeur par :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{z=0} \approx \frac{U}{\delta}. \tag{6.11}$$

On en déduit alors l'expression approchée de la contrainte pariétale :

$$\tau_w \approx \mu \frac{U}{\delta} = \mu U \left(\frac{\rho U}{\mu L}\right)^{1/2} = \rho U^2 \left(\frac{\mu}{\rho U L}\right)^{1/2}. \tag{6.12}$$

Il en résulte que la contrainte de cisaillement adimensionnée varie comme :

$$\frac{\tau_w}{\rho U^2} \approx \mathrm{Re}^{-1/2}. \tag{6.13}$$

Un calcul plus précis montre que le coefficient de proportionnalité associé à cette loi vaut numériquement :

$$\frac{\tau_w}{\rho U^2} = 0.332\,\mathrm{Re}^{-1/2}. \tag{6.14}$$

Il est également possible d'en déduire une expression de la force de traînée totale exercée sur la plaque. Si l désigne la largeur de celle-ci, la traînée totale s'écrit :

$$F = \tau_w L l \approx l \left(\rho \mu U^3 L\right)^{1/2}. \tag{6.15}$$

Le coefficient de traînée est défini comme le rapport entre la force de traînée et la pression dynamique multipliée par la surface de la plaque S :

$$C_0 = \frac{F}{\frac{1}{2}\rho U^2 S} \approx \mathrm{Re}^{-1/2}. \tag{6.16}$$

Une analyse détaillée permet finalement d'établir la relation suivante :

$$C_0 = 1.328\,\mathrm{Re}^{-1/2}. \tag{6.17}$$

6.3 Analyse des échelles dominantes dans la couche limite

Outre l'épaisseur de la couche limite, il est nécessaire d'introduire plusieurs grandeurs caractéristiques afin de décrire les flux de quantité de mouvement et d'énergie cinétique.

6.3.1 Épaisseur de déplacement

Considérons un écoulement bidimensionnel le long d'une plaque plane parallèle (voir Fig. 6). Le débit massique du fluide traversant la section d'abscisse x, à l'intérieur de la couche limite, s'écrit :

$$Q_m = \int_0^\delta \rho u dz \tag{6.18}$$

En l'absence de couche limite et dans l'hypothèse d'un fluide parfait, le débit massique traversant une

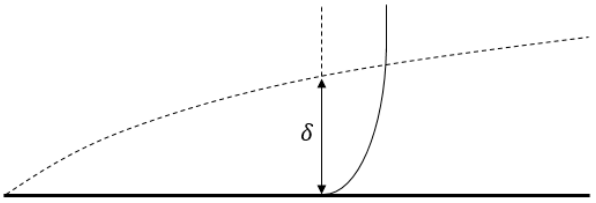


FIG. 6: Couche limite sur plaque plane : la vitesse à l'infini est uniforme et seule la région de couche limite, d'épaisseur δ, située au-dessus de la plaque est prise en compte.

section normale à l'écoulement s'exprime par :

$$q_{m_e} = \int_0^\delta \rho_e\, u_e\, \mathrm{d}z \tag{6.19}$$

L'apparition de la couche limite engendre une réduction du débit massique, que l'on peut quantifier par le déficit suivant :

$$q_{m_e} - q_m = \int_0^\delta (\rho_e\, u_e - \rho\, u)\, \mathrm{d}z \tag{6.20}$$

Cette perte de débit massique peut être représentée à l'aide de l'épaisseur de déplacement, conduisant à l'expression :

$$q_{m_e} - q_m = \rho_e\, u_e\, \delta^* \tag{6.21}$$

où l'épaisseur δ^* est homogène à une longueur et est définie par :

$$\delta^* = \int_0^\delta \left(1 - \frac{\rho\, u}{\rho_e\, u_e}\right) \mathrm{d}z \tag{6.22}$$

La grandeur δ^*, appelée *épaisseur de déplacement*, représente la distance équivalente à laquelle l'écoulement de fluide parfait est décalé par rapport à la paroi, en raison du ralentissement du fluide au sein de la couche limite.

6.3.2 Épaisseur de quantité de mouvement

Examinons le débit de quantité de mouvement qui traverse la couche limite :

$$J = \int_0^\delta \rho u^2 \, dz \tag{6.23}$$

Comparons cette grandeur au débit correspondant à un écoulement uniforme de même débit massique, mais caractérisé par la vitesse extérieure u_e. Le débit massique qui s'écoule à travers la couche limite s'exprime par :

$$q_m = \int_0^\delta \rho u \, dz \tag{6.24}$$

Le débit de quantité de mouvement associé à cet écoulement peut alors s'écrire :

$$J_e = q_m u_e = \int_0^\delta \rho u u_e \, dz \tag{6.25}$$

L'écart entre ces deux débits de quantité de mouvement se calcule comme suit :

$$J_e - J = q_m u_e - \int_0^\delta \rho u \left(u_e - u\right) \, dz \tag{6.26}$$

Cette différence peut également être formulée sous la forme :

$$J_e - J = \rho_e u_e^2 \theta \tag{6.27}$$

Le paramètre θ est homogène à une longueur et quantifie la perte de quantité de mouvement induite par la présence de la couche limite. On désigne θ sous le nom d'épaisseur de perte de quantité de mouvement, ou simplement épaisseur de quantité de mouvement :

$$\theta = \int_0^\delta \frac{\rho u}{\rho_e u_e} \left(1 - \frac{u}{u_e}\right) \, dz \tag{6.28}$$

Afin de démontrer l'intérêt pratique d'une telle grandeur, considérons une plaque plane (Fig. 7). Dans cette configuration, il n'existe aucun gradient de pression selon la direction axiale. Pour établir la force tangentielle totale exercée par l'écoulement sur la plaque, on peut réaliser le bilan des quantités de mouvement pour le volume de contrôle ABCD.

Le flux de quantité de mouvement entrant par la face AB s'exprime comme :

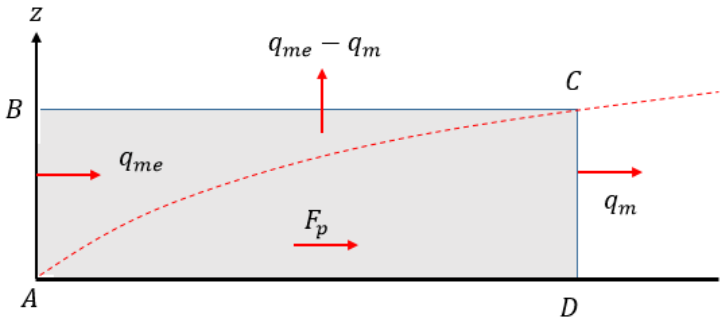


FIG. 7: Volume de contrôle utilisé pour déterminer la perte de quantité de mouvement dans la couche limite se développant sur une plaque plane

$$\rho_e u_e^2 \delta \tag{6.29}$$

Le flux de quantité de mouvement sortant par la face CD s'écrit :

$$\int_0^\delta \rho u^2 \, dz \tag{6.30}$$

Analysons maintenant la face BC. Le débit massique qui s'écoule à travers cette face est donné par :

$$\rho_e u_e \delta - \int_0^\delta \rho u \, dz = \int_0^\delta (\rho_e u_e - \rho u) \, dz \tag{6.31}$$

et le flux de quantité de mouvement correspondant s'écrit :

$$u_e \int_0^\delta (\rho_e u_e - \rho u) \, dz \tag{6.32}$$

Si F_p représente la force pariétale exercée par le fluide sur la plaque, le bilan de quantité de mouvement peut être formulé comme suit :

$$\int_0^\delta \rho u^2 \, dz + \int_0^\delta u_e(\rho_e u_e - \rho u) \, dz - \rho_e u_e^2 \delta = -F_p + \int_{AB} p \, dz - \int_{CD} p \, dz \tag{6.33}$$

Dans le cas où il n'existe pas de gradient de pression axial :

$$\int_{AB} p \, dz = \int_{CD} p \, dz \tag{6.34}$$

et

$$F_p = \int_0^\delta \rho_e u(u_e - u) \, dz \tag{6.35}$$

$$F_p = \rho u_e^2 \theta \tag{6.36}$$

Ainsi, θ constitue une mesure directe de la force pariétale qu'exerce le fluide sur la plaque pour une largeur unitaire (largeur de 1 en x). La force pariétale totale appliquée par le fluide entre les sections x_1 et x_2 se déduit de ce résultat :

$$F_p(x_2 - x_1) = F_p(x_2) - F_p(x_1) \tag{6.37}$$

$$= \rho_e u_e^2 \left[\theta(x_2) - \theta(x_1)\right] \tag{6.38}$$

Pour un élément de plaque δx, la force élémentaire s'exprime par :

$$\delta_x F_p(\delta x) = \rho_e u_e^2 \left[\theta(x + \delta x) - \theta(x)\right] \tag{6.39}$$

et la contrainte locale τ_p agissant sur la plaque s'écrit :

$$\tau_p = \lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta F}{\delta x} = \lim_{\delta x \to 0} \rho_e u_e^2 \frac{\theta(x + \delta x) - \theta(x)}{\delta x} \tag{6.40}$$

soit :

$$\tau_p = \rho_e u_e^2 \frac{d\theta}{dx} \tag{6.41}$$

6.3.3 Épaisseur d'énergie cinétique, d'enthalpie et d'enthalpie d'arrêt

L'analyse du bilan énergétique dans les couches limites permet de mettre en évidence les épaisseurs caractéristiques suivantes :

Ép. énergie cinétique :
$$\delta_3 = \int_0^\delta \frac{\rho u}{\rho_e u_e}\left(1 - \frac{u^2}{u_e^2}\right) dz \tag{6.42}$$

Ép. enthalpie d'arrêt :
$$\Delta = \int_0^\delta \frac{\rho u}{\rho_e u_e}\left(\frac{h_t}{h_e} - 1\right) dz \tag{6.43}$$

Ép. enthalpie :
$$\Delta = \int_0^\delta \frac{\rho u}{\rho_e u_e}\left(\frac{h - h_e}{h_p - h_e} - 1\right) dz \tag{6.44}$$

où $h_t = h + u^2/2$.

6.4 Équations de la couche limite sur plaque plane

Considérons l'écoulement bidimensionnel d'un fluide incompressible au voisinage d'une plaque plane. Le système d'équations régissant cet écoulement s'écrit :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial w}{\partial z} = 0 \\ u\dfrac{\partial u}{\partial x} + w\dfrac{\partial u}{\partial z} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \\ u\dfrac{\partial w}{\partial x} + w\dfrac{\partial w}{\partial z} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial z} + \nu\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) \end{cases} \tag{6.45}$$

soumis aux conditions aux limites suivantes :

$$\begin{cases} u(x,0) = 0 \\ w(x,0) = 0 \\ u(x,\infty) = U(x) \end{cases} \tag{6.46}$$

Procédons à une estimation d'ordre de grandeur des différents termes présents dans les équations. Pour ce faire, introduisons deux échelles caractéristiques :

- δ : l'épaisseur de la couche limite
- L : une longueur caractéristique selon la direction de l'écoulement

en supposant que $\delta/L \ll 1$

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{U}{L}, \quad \frac{\partial w}{\partial z} \approx \frac{W_0}{\delta} \tag{6.47}$$

- **L'équation de continuité** conduit à :

$$\frac{W_0}{\delta} \approx \frac{U}{L}, \quad W_0 \approx U\frac{\delta}{L} \tag{6.48}$$

- **L'équation de quantité de mouvement selon x** s'écrit :

$$\underbrace{\frac{U^2}{L}}_{1}\underbrace{\left(\frac{U\delta}{L}\right)\frac{U}{\delta}}_{2} = \underbrace{\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}}_{3}\underbrace{\nu\frac{U}{L^2}}_{4}\underbrace{\nu\frac{U}{\delta^2}}_{5} \tag{6.49}$$

En comparant le quatrième terme au cinquième :

$$\frac{4}{5} \approx \left(\frac{\delta}{L}\right)^2 \ll 1 \tag{6.50}$$

Les deux premiers termes et le cinquième terme doivent par conséquent présenter le même ordre de grandeur :

$$\frac{U^2}{L} \approx \nu \frac{U}{\delta^2} \tag{6.51}$$

Cette relation établit le rapport de l'épaisseur δ à la longueur L :

$$\left(\frac{\delta}{L}\right)^2 \approx \frac{\nu}{UL} = \frac{1}{Re_L} \tag{6.52}$$

soit :

$$\delta \approx \frac{L}{Re_L^{1/2}} \tag{6.53}$$

Afin que le rapport δ/L reste petit devant 1, il est nécessaire que le nombre de Reynolds basé sur L soit suffisamment élevé : $\delta/L \ll 1$ si $Re_L \gg 1$. L'équation de quantité de mouvement se réduit alors à la forme simplifiée :

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + w\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \tag{6.54}$$

- **Analysons l'équation de quantité de mouvement selon z**

$$u\frac{\partial w}{\partial x} + w\frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \nu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) \tag{6.55}$$

soit :

$$\underbrace{U\frac{U\delta}{L^2}}_{1}\underbrace{\left(\frac{U\delta}{L}\right)^2\frac{1}{\delta}}_{2} = \underbrace{\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}}_{3}\underbrace{\nu\frac{U\delta}{L^3}}_{4}\underbrace{\nu\frac{U\delta}{\delta^2 L}}_{5} \tag{6.56}$$

d'où :

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} \approx U^2\frac{\delta}{L^2} \tag{6.57}$$

tandis que :

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} \approx \frac{U^2}{L} \tag{6.58}$$

Le gradient de pression selon δ s'avère inférieur d'un ordre de grandeur à celui qui subsiste dans la direction axiale :

$$\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}\right) / \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}\right) \approx \frac{\delta}{L} \ll 1 \tag{6.59}$$

Au sein de la couche limite, la pression varie très peu dans la direction transversale et l'équation de quantité de mouvement selon z se simplifie en :

$$\frac{\partial p}{\partial z} = 0 \tag{6.60}$$

- **dans l'écoulement externe** :

$$\rho u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial x} \tag{6.61}$$

p dépend uniquement de x. À l'extérieur de la couche limite, la pression et la vitesse sont reliées par l'équation de Bernoulli :

$$p + \frac{1}{2}\rho u_e^2 = Cte \tag{6.62}$$

Les équations finales du système s'expriment donc par :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial w}{\partial z} = 0 \\ u\dfrac{\partial u}{\partial x} + w\dfrac{\partial u}{\partial z} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x} + \nu\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} \\ \dfrac{\partial p}{\partial z} = 0 \end{cases} \tag{6.63}$$

assorties des conditions aux limites :

$$\begin{cases} u(x,0) = 0 \\ w(x,0) = 0 \\ u(x,\infty) = U(x) \end{cases} \tag{6.64}$$

6.4.1 Solution de Blasius

Pour une plaque plane immergée dans un écoulement uniforme de vitesse U, le gradient de pression axial est nul. On obtient alors :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial w}{\partial z} = 0 \\ u\dfrac{\partial u}{\partial x} + w\dfrac{\partial u}{\partial z} = \nu\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} \\ \dfrac{\partial p}{\partial z} = 0 \end{cases} \tag{6.65}$$

assorties des conditions aux limites :

$$\begin{cases} u(x,0) = 0 \\ w(x,0) = 0 \\ u(x,\infty) = U \end{cases} \tag{6.66}$$

Introduisons la fonction de courant définie par :

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad w = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \tag{6.67}$$

avec les conditions :

$$\begin{aligned} w(x,0) &= 0 \\ u(x,\infty) &= U \end{aligned} \tag{6.68}$$

L'équation différentielle devient alors :

$$\frac{\partial \psi}{\partial z}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \nu\frac{\partial^3 \psi}{\partial z^3} \tag{6.69}$$

avec les conditions aux limites :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial z}(x,0) &= 0 \\ \frac{\partial \psi}{\partial x}(x,0) &= 0 \\ \frac{\partial \psi}{\partial z}(x,\infty) &= U \end{aligned} \tag{6.70}$$

La deuxième condition peut se reformuler comme suit :

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial \psi}{\partial x}(x,0)\,dx = \psi(x_2,0) - \psi(x_1,0) = 0 \tag{6.71}$$

Si l'on impose $\psi(x,0) = 0$, la deuxième condition est automatiquement satisfaite. Cherchons alors s'il existe une solution de la forme :

$$\frac{u(x,z)}{U} = \Phi\left(\frac{z}{\delta}\right) \tag{6.72}$$

où Φ représente une même fonction pour tout x. Sachant que :

$$\delta \approx \left(\frac{\nu x}{U}\right)^{1/2} \tag{6.73}$$

Il est donc possible d'introduire comme variable de similitude :

$$\eta = z\left(\frac{U}{\nu x}\right)^{1/2} \tag{6.74}$$

Par ailleurs :

$$u = U\,\Phi\left(\frac{z}{\delta}\right) \tag{6.75}$$

La fonction de courant prend alors la forme :

$$\psi(x,z) = U\,\delta\,f(\eta) \tag{6.76}$$

où la fonction f doit satisfaire la condition $f'(\eta) = \Phi$. Exprimons ψ sous la forme :

$$\psi(x,z) = (U\,x\,\nu)^{1/2}\,f(\eta) \tag{6.77}$$

Évaluons les dérivées successives :

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{1}{2}z\left(\frac{U}{\nu x^3}\right)^{1/2} = -\frac{1}{2}\frac{\eta}{x} \tag{6.78}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial z} = \left(\frac{U}{\nu x}\right)^{1/2} = \frac{\eta}{z} \tag{6.79}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{1}{2}\left(\frac{U\nu}{x}\right)^{1/2} f + (U\,\nu\,x)^{1/2}\frac{\partial \eta}{\partial x}f' \tag{6.80}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{U\nu}{x}\right)^{1/2}(f - \eta f') \tag{6.81}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = (U\,\nu\,x)^{1/2}\frac{\partial \eta}{\partial z}f' = U\,f' \tag{6.82}$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial z} = U\,f''\frac{\partial\eta}{\partial x} = -\frac{1}{2}\frac{\eta}{x}U\,f'' \tag{6.83}$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = U\,f''\frac{\partial\eta}{\partial z} = U\,f''\left(\frac{U}{\nu x}\right)^{1/2} \tag{6.84}$$

$$\frac{\partial^3\psi}{\partial z^3} = U\,f'''\left(\frac{U}{\nu x}\right)^{1/2}\frac{\partial\eta}{\partial z} = U\,f'''\left(\frac{U}{\nu x}\right) \tag{6.85}$$

En substituant ces expressions :

$$-U\,f'\frac{U\eta}{2x}f'' - \frac{1}{2}\left(\frac{U\nu}{x}\right)^{1/2}(f-\eta f')U\,f''\left(\frac{U}{\nu x}\right)^{1/2} = \nu\left(\frac{U^2}{\nu x}\right)f''' \tag{6.86}$$

après simplification, on obtient l'équation de Blasius :

$$2f''' + ff'' = 0 \tag{6.87}$$

Conditions aux limites :

$$\begin{aligned}\frac{\partial\psi}{\partial z}(x,0) &= 0\\ \psi(x,0) &= 0\\ \frac{\partial\psi}{\partial z}(x,\infty) &= U\end{aligned} \tag{6.88}$$

Ces conditions se traduisent par :

$$\begin{aligned}f'(0) &= 0\\ f(0) &= 0\\ f'(\infty) &= 1\end{aligned} \tag{6.89}$$

L'intégration numérique retenue est celle développée par Keller pour l'équation de Falker-Skan :

$$f''' + \frac{m+1}{2}ff'' + m\left(1-f'^2\right) = 0 \tag{6.90}$$

Cette équation décrit l'évolution de couches limites laminaires en présence d'un gradient de pression axial. L'équation de Blasius correspond au cas particulier où $m = 0$.

6.4.2 Solution approchée de Von Kármán–Pohlhausen

Dans le cas où des solutions exactes de la couche limite ne peuvent pas être trouvées, on cherche des solutions approchées. La méthode d'approximation classique qui est largement utilisée fut introduite par Von Kármán (équation) et développée par Pohlhausen. Cette méthode consiste à donner une approximation polynomiale de la vitesse réduite $\left(\frac{u}{U}\right)$ dans la couche limite en fonction de l'épaisseur réduite $\left(\frac{z}{\delta}\right)$:

$$\frac{u}{U} = \sum_{i=1}^{n} a_i\left(\frac{z}{\delta}\right)^i \quad \text{avec} \quad a_i = \text{constante} \tag{6.91}$$

Les constantes a_i et le degré du polynôme n sont déterminés à partir des conditions aux limites du problème étudié (forme géométrique de l'obstacle, l'écoulement potentiel, ...etc).

La résolution d'un problème dynamique de couche limite consiste à trouver les composantes $u(x,z)$ et

$v(x,z)$ de la vitesse satisfaisant aux équations (en régime permanent) :

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial z}=U\cdot\frac{\partial U}{\partial x}+\nu\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \tag{6.92}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial z}=0 \tag{6.93}$$

Pour les conditions aux limites :

$$z=0;\quad u=v=0\quad \text{(condition d'adhérence)} \tag{6.94}$$

$$z\to\infty;\quad u\to U\quad \text{(condition à l'infini)} \tag{6.95}$$

Une solution exacte est peut être trouvée pour des répartitions spéciales de $U(x)$ mais ceci reste insuffisant pour couvrir tous les autres cas pratiques importants. Pour cela, on a besoin de méthode dont l'application peut être généralisée à un grand nombre de cas de vitesse extérieure $U(x)$.

Un autre problème dans l'étude de la couche limite, consiste à rechercher les lois de variation de τ_0, δ_1 et δ_2 en fonction de x. Ces quantités qui représentent un grand intérêt peuvent être calculées si on connait $u(x,z)$.

La méthode de Pohlhausen est fondées sur les équations globales de la couche limite, en particulier, l'équation globale de quantité de mouvement (Équation de Kármán). Elle peut etre appliquée aux calculs de la couche limite, aussi bien laminaire que turbulent.

6.4.2.1 Procédure d'approximation simple

Pour un écoulement permanent sur une plaque plane pour une vitesse de l'écoulement potentiel U constante. Par application de l'équation de Bernoulli à l'écoulement potentiel on a :

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}=U\cdot\frac{\partial U}{\partial x}=0\ \text{ car }\ U=cte \tag{6.96}$$

Les équations de la couche limite sont :

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial z}=\nu\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\ \text{ (Equation intégrale de Qte de Mvt)} \tag{6.97}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial z}=0\ \text{ (Equation de continuité)} \tag{6.98}$$

Par combinaison des deux équations ((6.97)+u·(6.98)) on a :

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial z}+u\cdot\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial z}\right)=\nu\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \tag{6.99}$$

qui donne :

$$2u\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial z}(u\cdot v)=\nu\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \tag{6.100}$$

et qu'on peut mettre sous la forme :

$$\frac{\partial}{\partial x}(u\cdot u)+\frac{\partial}{\partial z}(u\cdot v)=\nu\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \tag{6.101}$$

En intégrant localement l'équation (6.101) par rapport à z entre 0 et δ :

$$\int_0^\delta \frac{\partial u^2}{\partial x}dz + \int_0^\delta \frac{\partial}{\partial z}(u \cdot v)dz = \int_0^\delta \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}dz \tag{6.102}$$

qui donne :

$$\int_0^\delta \frac{\partial u^2}{\partial x}dz + [u \cdot v]_0^\delta = \nu \left[\frac{\partial u}{\partial z}\right]_0^\delta \tag{6.103}$$

On évalue entre 0 et δ :

$$\int_0^\delta \frac{\partial u^2}{\partial x}dz + [u(x,\delta) \cdot v(x,\delta) - u(x,0) \cdot v(x,0)] = \nu \left[\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_\delta - \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_0\right] \tag{6.104}$$

D'après les conditions aux limites :

Condition sur la paroi $(y = 0)$: $u(x,0) = v(x,0) = 0$, et $\mu \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_0 = \tau_p$

Condition à la frontière de la couche limite $(y = \delta)$: $u(x,\delta) = U$ et $\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_\delta = 0$

En appliquant ces conditions, l'équation de la couche limite devient :

$$\int_0^\delta \frac{\partial u^2}{\partial x}dz + U \cdot v(x,\delta) = -\frac{\tau_p}{\rho} \tag{6.105}$$

Cherchons $v(x,\delta)$ par intégration de l'équation de continuité :

$$\int_0^\delta \frac{\partial u}{\partial x}dz + \int_0^\delta \frac{\partial v}{\partial z}dz = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_0^\delta \frac{\partial u}{\partial x}dz + \Big[v(x,\delta) - \cancel{v(x,0)}\Big]^0 = 0 \tag{6.106}$$

qui donne :

$$v(x,\delta) = -\int_0^\delta \frac{\partial u}{\partial x}dz \tag{6.107}$$

L'équation(6.105) s'écrit alors :

$$\int_0^\delta \frac{\partial u^2}{\partial x}dz - U\int_0^\delta \frac{\partial u}{\partial x}dz = -\frac{\tau_p}{\rho} \tag{6.108}$$

Appliquons la loi de Leibniz aux termes de l'équation (6.108).

Règle de Leibniz pour les intégrales

$$\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{\partial f(x,z)}{\partial x}dz = \frac{d}{dx}\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,z)dz + f(x,\alpha)\frac{d\alpha}{dx} - f(x,\beta)\frac{d\beta}{dx}$$

$$\int_0^\delta \frac{\partial u^2}{\partial x}dz = \frac{d}{dx}\int_0^\delta u^2 dz + u^2(x,0)\frac{d0}{dx} - u^2(x,\delta)\frac{d\delta}{dx} = \frac{d}{dx}\int_0^\delta u^2 dz - U^2\frac{d\delta}{dx}$$

$$\int_0^\delta \frac{\partial u}{\partial x}dz = \frac{d}{dx}\int_0^\delta u dz - U\frac{d\delta}{dx}$$

L'équation (6.108) donne :

$$\frac{d}{dx}\int_0^\delta u^2 dz - U^2\frac{d\delta}{dx} - U\left(\frac{d}{dx}\int_0^\delta u dz - U\frac{d\delta}{dx}\right) = -\frac{\tau_p}{\rho} \tag{6.109}$$

qui donne :

$$\frac{d}{dx}\int_0^\delta u(U-u)dz = \frac{\tau_p}{\rho} \tag{6.110}$$

Cela implique :

$$\frac{d}{dx}\left[U^2\int_0^\delta \frac{u}{U}\left(1-\frac{u}{U}\right)dz\right] = \frac{\tau_p}{\rho} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dx}\left[\int_0^\delta \frac{u}{U}\left(1-\frac{u}{U}\right)dz\right] = \frac{\tau_p}{\rho U^2} \tag{6.111}$$

On pose $\theta = \int_0^\delta \frac{u}{U}\left(1-\frac{u}{U}\right)dz$ La forme finale de l'équation (6.108) est donnée par :

$$\boxed{\frac{d\theta}{dx} = \frac{\tau_p}{\rho U^2}} \tag{6.112}$$

Cette équation montre que la variation de la quantité de mouvement en n'importe quelle section de la couche limite est égale à la force produite par la contrainte de cisaillement en cette section.

Pour calculer cette intégrale et obtenir une equation différentielle ordinaire, on exprime $\frac{u}{U}$ comme un développement polynomial de la variable $\left(\frac{z}{\delta}\right)$.

a-Polynôme de degré 2 :

$$\frac{u}{U} = a_0 + a_1\left(\frac{z}{\delta}\right) + a_2\left(\frac{z}{\delta}\right)^2 \tag{6.113}$$

a_0, a_1 et a_2 seront déterminés par les conditions aux limites.

$$\begin{aligned} u(x,0) = 0 \quad &\Rightarrow \quad a_0 = 0 \\ u(x,\delta) = U \quad &\Rightarrow \quad a_1 + a_2 = 1 \\ \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=\delta} = 0 \quad &\Rightarrow \quad a_1 + 2a_2 = 0 \end{aligned}$$

On trouve : $a_1 = 2$, $a_2 = -1$.
La vitesse réduite s'écrit comme un polynôme :

$$\frac{u}{U} = 2\cdot\frac{z}{\delta} - \left(\frac{z}{\delta}\right)^2 = 2\eta - \eta^2, \quad \text{avec} \quad \eta = \frac{z}{\delta}, \quad dz = \delta d\eta \tag{6.114}$$

L'équation intégrale de la quantité de mouvement (6.112) s'écrit :

$$\frac{d}{dx}\left[U^2\int_0^\delta \frac{u}{U}\left(1-\frac{u}{U}\right)dz\right] = \frac{\tau_p}{\rho} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dx}\left[U^2\delta\int_0^1 (2\eta-\eta^2)\left(1-2\eta+\eta^2\right)d\eta\right] = \frac{\tau_p}{\rho} \tag{6.115}$$

qui donne :

$$\frac{d}{dx}\left[U^2\delta\cdot\frac{2}{15}\right] = \frac{\tau_p}{\rho} \tag{6.116}$$

Aussi on a :

$$\frac{\tau_p}{\rho} = \nu\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=0} = \frac{\nu U}{\delta}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{u}{U}\right)\Big|_{\eta=0} = 2\cdot\frac{\nu U}{\delta} \tag{6.117}$$

Par égalisation entre ces deux dernières equations :

$$\delta \cdot \frac{d\delta}{dx} = \frac{15\nu}{U} \quad \Rightarrow \quad \delta \cdot d\delta = \frac{15\nu}{U} dx \tag{6.118}$$

L'intégration donne :

$$\delta^2(x) = \frac{30\nu \cdot x}{U} \quad \Rightarrow \quad \delta(x) = \sqrt{30} \cdot \sqrt{\frac{\nu x}{U}} \tag{6.119}$$

On pose $Re_x = \sqrt{\frac{U \cdot x}{\nu}}$, on peut écrire l'épaisseur de la couche limite comme :

$$\boxed{\delta(x) = \frac{5.48\ x}{Re_x^{1/2}}} \text{ qui mène à } \boxed{\frac{\tau_p}{\frac{1}{2}\rho U^2} = \frac{0.73}{Re_x^{1/2}}} \tag{6.120}$$

Les résultats de la solution exacte sont donnés par :

$$\boxed{\delta(x) = \frac{5\ x}{Re_x^{1/2}}} \text{ qui mène à } \boxed{\frac{\tau_p}{\frac{1}{2}\rho U^2} = \frac{0.664}{Re_x^{1/2}}} \tag{6.121}$$

Une solution exacte vérifie les équations de base en tout point (x, y) de l'écoulement mais une solution approchée satisfait l'équation de la couche limite plutôt en moyenne qu'en tout point du fluide. Les résultats obtenus par l'approximation seront raisonnablement précis et exacts dans la plupart des cas.

b-Procédure d'approximation généralisée de Karman - Pohlhausen :

Dans le cas d'une couche limite laminaire avec gradient de pression c-à-d : $U(x)$ et $\frac{\partial p}{\partial x} \neq 0$, le profil des vitesse s'écrit en polynôme de degré 4.

$$\frac{u}{U} = a + b\eta + c\eta^2 + d\eta^3 + e\eta^4 \quad \text{où} \quad \eta = \frac{z}{\delta(x)} \tag{6.122}$$

Pour déterminer les 5 coefficients du polynôme $(a, b, c...)$ on applique les 5 conditions aux limites suivantes :

Deux conditions de paroi : $(z = 0)$ et trois conditions sur $(z = \delta)$:

$$u(x, 0) = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial^2 u(x, 0)}{\partial z^2} = -\frac{U(x)}{\nu} \frac{dU(x)}{dx} \tag{2}$$

$$u(x, \delta) = U(x) \tag{3}$$

$$\frac{\partial u(x, \delta)}{\partial z} = 0 \tag{4}$$

$$\frac{\partial^2 u(x, \delta)}{\partial z^2} = 0 \tag{5}$$

La réécriture des conditions aux limites en variables adimensionnelles $\left(\frac{u}{U}\right)$ et η donne :

Conditions de paroi $(\eta = 0)$	**Conditions de l'écoulement potentiel** $(\eta = 1)$
(1) $\dfrac{u}{U} = 0$	(3) $\dfrac{u}{U} = 1$
(2) $\dfrac{\partial^2(u/U)}{\partial\eta^2} = -\dfrac{\delta^2}{\nu}\dfrac{dU}{dx} = -\Lambda(x)$	(4) $\dfrac{\partial(u/U)}{\partial\eta} = 0$
	(5) $\dfrac{\partial^2(u/U)}{\partial\eta^2} = 0$

avec $\Lambda(x)$: un facteur de forme sans dimension. L'application des conditions aux limites à l'équation (6.122) donne :

$$(1) \quad \frac{u}{U} = 0 = a \qquad \text{pour } \eta = 0 \tag{6.123}$$

$$(2) \quad \frac{\partial^2(u/U)}{\partial\eta^2} = 2c = -\Lambda \Rightarrow c = -\frac{\Lambda}{2} \qquad \text{pour } \eta = 0 \tag{6.124}$$

$$(3) \quad \frac{u}{U} = 1 = a + b + c + d + e \qquad \text{pour } \eta = 1 \tag{6.125}$$

$$(4) \quad \frac{\partial(u/U)}{\partial\eta} = 0 = b + 2c + 3d + 4e \qquad \text{pour } \eta = 1 \tag{6.126}$$

$$(5) \quad \frac{\partial^2(u/U)}{\partial\eta^2} = 0 = 2c + 6d + 12e \qquad \text{pour } \eta = 1 \tag{6.127}$$

La résolution du système donne les valeurs en fonction de Λ :

$$a = 0; \quad b = 2 + \frac{\Lambda}{6}; \quad c = -\frac{\Lambda}{2}; \quad d = -2 + \frac{\Lambda}{2}; \quad e = 1 - \frac{\Lambda}{6}$$

En remplaçant les valeurs des coefficients dans l'équation (6.122), on obtient le profil de vitesse :

$$\frac{u}{U} = \left(2 + \frac{\Lambda}{6}\right)\eta - \frac{\Lambda}{2}\eta^2 + \left(-2 + \frac{\Lambda}{2}\right)\eta^3 + \left(1 - \frac{\Lambda}{6}\right)\eta^4 \tag{6.128}$$

qui peut se mettre sous la forme :

$$\frac{u}{U} = 2\eta - 2\eta^3 + \eta^4 + \frac{\Lambda}{6}\left(\eta - 3\eta^2 + 3\eta^3 - \eta^4\right) \tag{6.129}$$

ou encore :

$$\boxed{\frac{u}{U} = 2\eta - 2\eta^3 + \eta^4 + \frac{\Lambda}{6}\eta(1-\eta)^3} \tag{6.130}$$

Le paramètre de forme $\Lambda(x)$ caractérise l'influence du gradient de pression sur le profil de vitesse :

- $\Lambda > 0$: gradient de pression favorable ($\frac{dp}{dx} < 0$)
- $\Lambda = 0$: écoulement de Blasius (plaque plane)
- $\Lambda < 0$: gradient de pression adverse ($\frac{dp}{dx} > 0$)

Calcul de l'épaisseur de quantité de mouvement θ :

L'épaisseur de quantité de mouvement est définie par :

$$\theta = \int_0^\delta \frac{u}{U}\left(1-\frac{u}{U}\right)dz = \delta\int_0^1 \frac{u}{U}\left(1-\frac{u}{U}\right)d\eta \tag{6.131}$$

En substituant le profil (6.130) :

$$\theta = \delta\int_0^1 \left[2\eta-2\eta^3+\eta^4+\frac{\Lambda}{6}\eta(1-\eta)^3\right]\left[1-2\eta+2\eta^3-\eta^4-\frac{\Lambda}{6}\eta(1-\eta)^3\right]d\eta \tag{6.132}$$

Après intégration, on obtient :

$$\boxed{\theta = \delta\left(\frac{37}{315}-\frac{\Lambda}{945}-\frac{\Lambda^2}{9072}\right)} \tag{6.133}$$

Pour $\Lambda = 0$ (plaque plane), on retrouve : $\theta = \frac{37}{315}\delta \approx 0.1175\delta$

Calcul de la contrainte de cisaillement à la paroi :

La contrainte de cisaillement à la paroi est donnée par :

$$\tau_p = \mu\frac{\partial u}{\partial z}\bigg|_{z=0} = \frac{\mu U}{\delta}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{u}{U}\right)\bigg|_{\eta=0} \tag{6.134}$$

En dérivant le profil (6.130) :

$$\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{u}{U}\right) = 2-6\eta^2+4\eta^3+\frac{\Lambda}{6}(1-\eta)^2(1-4\eta) \tag{6.135}$$

À la paroi ($\eta = 0$) :

$$\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{u}{U}\right)\bigg|_{\eta=0} = 2+\frac{\Lambda}{6} \tag{6.136}$$

Donc :

$$\boxed{\tau_p = \frac{\mu U}{\delta}\left(2+\frac{\Lambda}{6}\right)} \tag{6.137}$$

Équation intégrale de quantité de mouvement :

L'équation de Karman pour un écoulement avec gradient de pression s'écrit :

$$\frac{d\theta}{dx}+\frac{\theta}{U}\frac{dU}{dx}(2+H) = \frac{\tau_p}{\rho U^2} \tag{6.138}$$

où $H = \frac{\delta_1}{\theta}$ est le facteur de forme.

En substituant les expressions de θ et τ_p, et en utilisant $\Lambda = \frac{\delta^2}{\nu}\frac{dU}{dx}$, on obtient une équation différentielle pour $\delta(x)$:

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left[\delta^2 F(\Lambda)\right] = \frac{2\nu}{U}G(\Lambda)} \tag{6.139}$$

avec :

$$F(\Lambda) = \frac{37}{315}-\frac{\Lambda}{945}-\frac{\Lambda^2}{9072} \tag{6.140}$$

$$G(\Lambda) = 2+\frac{\Lambda}{6} \tag{6.141}$$

Point de séparation :

La séparation de la couche limite se produit lorsque $\tau_p = 0$, c'est-à-dire :

$$2 + \frac{\Lambda}{6} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Lambda_{\text{sep}} = -12} \tag{6.142}$$

Cette valeur critique correspond à un gradient de pression adverse important qui provoque le décollement de la couche limite.

6.4.3 Applications numériques et cas particuliers

6.4.3.1 Cas 1 : Plaque plane ($\Lambda = 0$)

Pour une plaque plane, $U =$ constante et $\frac{dU}{dx} = 0$, donc $\Lambda = 0$.
Le profil de vitesse se réduit à :

$$\frac{u}{U} = 2\eta - 2\eta^3 + \eta^4 \tag{6.143}$$

L'épaisseur de quantité de mouvement :

$$\theta = \frac{37}{315}\delta \approx 0.1175\delta \tag{6.144}$$

La contrainte de cisaillement à la paroi :

$$\tau_p = \frac{2\mu U}{\delta} \tag{6.145}$$

L'équation intégrale devient :

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{37}{315}\delta^2\right) = \frac{2\nu}{U} \tag{6.146}$$

Soit :

$$\delta\frac{d\delta}{dx} = \frac{315\nu}{37U} \tag{6.147}$$

En intégrant avec la condition $\delta(0) = 0$:

$$\delta^2 = \frac{630\nu x}{37U} = \frac{630}{37}\frac{\nu x}{U} \tag{6.148}$$

D'où :

$$\boxed{\delta(x) = \sqrt{\frac{630}{37}}\sqrt{\frac{\nu x}{U}} = 4.12\sqrt{\frac{\nu x}{U}} = \frac{4.12\,x}{\sqrt{Re_x}}} \tag{6.149}$$

Le coefficient de frottement local :

$$C_f = \frac{\tau_p}{\frac{1}{2}\rho U^2} = \frac{2\mu U}{\delta \cdot \frac{1}{2}\rho U^2} = \frac{4\nu}{\delta U} \tag{6.150}$$

En remplaçant δ :

$$\boxed{C_f = \frac{4\nu}{U} \cdot \frac{\sqrt{Re_x}}{4.12\,x} = \frac{0.97}{\sqrt{Re_x}}} \tag{6.151}$$

Comparaison avec la solution exacte de Blasius :

Paramètre	Blasius (exact)	Pohlhausen	Écart (%)
$\delta(x)/x \cdot \sqrt{Re_x}$	5.00	4.12	-17.6%
θ/δ	0.1328	0.1175	-11.5%
$C_f \cdot \sqrt{Re_x}$	0.664	0.97	$+46\%$

L'approximation de Pohlhausen donne des résultats raisonnables pour δ et θ, mais moins précis pour C_f qui dépend de la dérivée du profil à la paroi.

6.4.3.2 Cas 2 : Écoulement sur un cylindre circulaire

Pour un cylindre de rayon R en écoulement uniforme U_∞, la vitesse de l'écoulement potentiel est :

$$U(x) = 2U_\infty \sin\left(\frac{x}{R}\right) \tag{6.152}$$

où x est mesuré le long de la surface du cylindre à partir du point d'arrêt ($x = 0$).
La dérivée de la vitesse :

$$\frac{dU}{dx} = \frac{2U_\infty}{R} \cos\left(\frac{x}{R}\right) \tag{6.153}$$

Le paramètre Λ s'écrit :

$$\Lambda(x) = \frac{\delta^2}{\nu} \cdot \frac{2U_\infty}{R} \cos\left(\frac{x}{R}\right) \tag{6.154}$$

Au point d'arrêt $(x = 0)$:

- $U(0) = 0$
- $\left.\frac{dU}{dx}\right|_{x=0} = \frac{2U_\infty}{R} > 0$ (gradient favorable)
- La couche limite commence avec $\Lambda > 0$

À $x = \frac{\pi R}{2}$ (sommet du cylindre) :

- $U = 2U_\infty$ (vitesse maximale)
- $\frac{dU}{dx} = 0$ (point d'inflexion)
- $\Lambda = 0$

Pour $x > \frac{\pi R}{2}$:

- $\frac{dU}{dx} < 0$ (gradient adverse)
- $\Lambda < 0$ et décroissant
- Risque de séparation lorsque $\Lambda \to -12$

Le point de séparation est prédit lorsque $\Lambda = -12$:

$$\frac{\delta^2}{\nu} \cdot \frac{2U_\infty}{R} \cos\left(\frac{x_{\text{sep}}}{R}\right) = -12 \tag{6.155}$$

Pour un cylindre, la méthode de Pohlhausen prédit la séparation à environ :

$$\boxed{x_{\text{sep}} \approx 1.82\, R \quad \text{soit} \quad \theta_{\text{sep}} \approx 104} \tag{6.156}$$

(mesuré depuis le point d'arrêt)
Les expériences montrent une séparation à environ 80 pour un écoulement laminaire, indiquant que la méthode surestime légèrement l'angle de séparation.

6.4.3.3 Cas 3 : Écoulement avec gradient de pression favorable constant

Considérons un écoulement où $U(x) = U_0 \left(1 + \frac{x}{L}\right)^m$ avec $m > 0$.
La dérivée :

$$\frac{dU}{dx} = \frac{mU_0}{L} \left(1 + \frac{x}{L}\right)^{m-1} \tag{6.157}$$

Le paramètre Λ :

$$\Lambda = \frac{\delta^2}{\nu} \cdot \frac{mU_0}{L} \left(1 + \frac{x}{L}\right)^{m-1} \tag{6.158}$$

Pour un gradient favorable constant ($m = 1$) :

$$U(x) = U_0 \left(1 + \frac{x}{L}\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{dU}{dx} = \frac{U_0}{L} = \text{constante} \tag{6.159}$$

L'équation intégrale donne :

$$\frac{d}{dx}\left[U^2 \delta^2 F(\Lambda)\right] = 2\nu U G(\Lambda) \tag{6.160}$$

En supposant Λ constant (hypothèse simplificatrice), on obtient :

$$\delta^2 \propto \frac{x}{U(x)} \tag{6.161}$$

Pour $\Lambda = 6$ (gradient favorable modéré) :

$$\boxed{\delta(x) \approx 3.5\sqrt{\frac{\nu x}{U(x)}}} \tag{6.162}$$

L'épaisseur de la couche limite croît plus lentement qu'en plaque plane grâce au gradient favorable.

6.4.3.4 Cas 4 : Écoulement dans un convergent

Dans un convergent, la section diminue et la vitesse augmente selon la conservation du débit :

$$U(x) = U_0 \left(\frac{A_0}{A(x)}\right) \tag{6.163}$$

où $A(x)$ est la section du convergent.
Pour un convergent conique d'angle α :

$$A(x) = \pi \left(R_0 - x \tan \alpha\right)^2 \tag{6.164}$$

Le gradient de pression est favorable ($\frac{dU}{dx} > 0$, $\Lambda > 0$), ce qui retarde ou empêche la séparation.
Exemple numérique :
Considérons un écoulement d'air à 20C avec :

- $U_0 = 10$ m/s
- $\nu = 1.5 \times 10^{-5}$ m^2/s
- $x = 0.5$ m

Pour une plaque plane ($\Lambda = 0$) :

$$Re_x = \frac{U_0 x}{\nu} = \frac{10 \times 0.5}{1.5 \times 10^{-5}} = 3.33 \times 10^5 \tag{6.165}$$

$$\delta = \frac{4.12 \times 0.5}{\sqrt{3.33 \times 10^5}} = 3.57 \times 10^{-3}\,\text{m} = 3.57\,\text{mm} \tag{6.166}$$

$$C_f = \frac{0.97}{\sqrt{3.33 \times 10^5}} = 1.68 \times 10^{-3} \tag{6.167}$$

$$\tau_p = C_f \cdot \frac{1}{2}\rho U_0^2 = 1.68 \times 10^{-3} \times \frac{1}{2} \times 1.2 \times 100 = 0.101\,\text{Pa} \tag{6.168}$$

6.4.3.5 Limites de la méthode de Pohlhausen

La méthode de Pohlhausen présente certaines limitations :

1. **Prédiction de la séparation** : Le critère $\Lambda = -12$ surestime l'angle de séparation d'environ 20% à 30%.
2. **Gradient adverse fort** : Pour $\Lambda < -12$, la solution n'a plus de sens physique car le profil de vitesse prédit des vitesses négatives.
3. **Transition turbulente** : La méthode ne prend pas en compte la transition vers la turbulence qui se produit typiquement pour $Re_x > 5 \times 10^5$.
4. **Précision du frottement** : L'erreur sur C_f peut atteindre 50% car le coefficient dépend de la dérivée seconde du polynôme.

Amélioration possible :
Pour améliorer la précision, on peut utiliser des polynômes d'ordre supérieur (degré 5 ou 6) avec des conditions aux limites supplémentaires portant sur les dérivées d'ordre supérieur.

6.4.3.6 Tableau récapitulatif

Configuration	Λ	État	$\delta/x \cdot \sqrt{Re_x}$
Gradient favorable fort	$\Lambda > 12$	Stable	< 3
Gradient favorable	$0 < \Lambda < 12$	Stable	$3 - 4$
Plaque plane (Blasius)	$\Lambda = 0$	Référence	4.12
Gradient adverse faible	$-6 < \Lambda < 0$	Instable	$4 - 5$
Gradient adverse fort	$-12 < \Lambda < -6$	Très instable	$5 - 7$
Séparation	$\Lambda = -12$	Séparation	≈ 7

6.5 Exercices

Exercice 1

On considère l'écoulement permanent d'un fluide incompressible dans le convergent formé par deux parois planes d'envergure infinie faisant entre elles un angle α (supposé petit). On désigne par O le point (fictif) d'intersection des traces des parois du convergent désignées par Δ et Δ' et (O, x, y) un repère orthonormé direct avec $(O, \vec{x})$ porté par Δ'.
En supposant le fluide parfait et l'écoulement unidimensionnel, déterminer la loi d'évolution de la vitesse $U_e(x)$.
On suppose maintenant le fluide visqueux et on se propose d'étudier la couche limite qui se développe sur l'une des parois (par exemple la paroi de trace Δ').

1. Les solutions de la couche limite admettent des solutions semblables. Pourquoi ?
2. On pose :
$$\frac{u}{U_e} = f'\left(\frac{y}{x}\right)$$
Démonter pourquoi ?
3. Établir la loi d'évolution de u ainsi que l'équation différentielle permettant de calculer f'.
Donner une intégrale première de cette équation différentielle en tenant compte des conditions aux limites.
Montrer que la solution obtenue n'a de sens que si l'on a l'écoulement dans un convergent et non dans un divergent.

Exercice 2

On considère l'écoulement permanent, bidimensionnel et incompressible d'un fluide visqueux (masse volumique ρ, viscosité cinématique ν) le long d'une paroi plane semi-infinie confondue avec l'axe (O, x), le bord d'attaque étant en $x = 0$. L'écoulement extérieur (fluide parfait) a pour vitesse :

$$U_e(x) = K\, x^m, \qquad K > 0,\ m \text{ constant}$$

Partie A : Écoulement extérieur et équations

1. Écrire l'équation de Bernoulli le long de la paroi et en déduire le gradient de pression $-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{dp}{dx}$ en fonction de K, m et x.
2. Écrire les équations de la couche limite laminaire (équation de continuité et équation de quantité de mouvement) et les conditions aux limites sur u et v.
3. On introduit la fonction de courant $\psi(x, y)$ telle que $u = \dfrac{\partial \psi}{\partial y}$ et $v = -\dfrac{\partial \psi}{\partial x}$. Réécrire l'équation de quantité de mouvement en fonction de ψ.

Partie B : Solutions semblables

4. On cherche des solutions de la forme :

$$\psi(x, y) = \sqrt{\frac{2\,\nu\,K}{m+1}}\; x^{\frac{m+1}{2}}\, f(\eta), \qquad \eta = y\sqrt{\frac{(m+1)K}{2\nu}}\; x^{\frac{m-1}{2}}$$

   Montrer que $\dfrac{u}{U_e} = f'(\eta)$.

5. Montrer que f vérifie l'équation de Falkner-Skan :

$$f''' + f f'' + \beta\left(1 - (f')^2\right) = 0, \qquad \beta = \frac{2m}{m+1}$$

   et préciser les conditions aux limites en $\eta = 0$ et $\eta \to \infty$.

6. Quelle est la valeur de β pour : (a) la plaque plane sans gradient de pression (Blasius) ; (b) le point d'arrêt (écoulement de Hiemenz) ; (c) le convergent de l'exercice 1 ? Pour quelle valeur de β obtient-on le décollement ($f''(0) = 0$) ? On donnera la valeur numérique connue $\beta_s \approx -0{,}199$ et la valeur correspondante de m.

Partie C : Grandeurs caractéristiques

7. Exprimer en fonction de $f''(0)$ le frottement pariétal $\tau_p = \mu \left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0}$ puis le coefficient de frottement local $C_f = \dfrac{\tau_p}{\frac{1}{2}\rho U_e^2}$ en fonction de $Re_x = \dfrac{U_e x}{\nu}$.
8. Exprimer l'épaisseur de déplacement $\delta_1 = \displaystyle\int_0^\infty \left(1 - \frac{u}{U_e}\right) dy$ en fonction de x, m, Re_x et de l'intégrale $\displaystyle\int_0^\infty (1 - f')\, d\eta$.
9. **Cas du point d'arrêt** ($m = 1$, $\beta = 1$) : sachant que $f''(0) \approx 1{,}2326$ et que $\displaystyle\int_0^\infty (1 - f')\, d\eta \approx 0{,}6479$, calculer $C_f\sqrt{Re_x}$ et $\delta_1\sqrt{Re_x}/x$. Que remarque-t-on sur l'évolution de δ_1 avec x ? Interpréter physiquement ce résultat.

Partie D : Lien avec l'exercice 1

10. Montrer que le convergent de l'exercice 1 correspond à $m = -1$. Quelle est alors la valeur de β ? Pourquoi les solutions de Falkner-Skan ne sont-elles pas définies à partir de $x = 0$ pour $m < 0$, et quelle région de l'écoulement est alors réellement décrite ?

Bibliographie

[1] Yunus Cengel et John Cimbala. *Fluid mechanics fundamentals and applications*. McGraw Hill, 2013.

[2] Raj P Chhabra et Swati A Patel. *Non-Newtonian flow and applied rheology : engineering applications*. Elsevier, 2025.

[3] David V Boger. "Demonstration of upper and lower Newtonian fluid behaviour in a pseudoplastic fluid". In : *Nature* 265.5590 (1977), p. 126-128. doi : https://doi.org/10.1038/265126a0.

[4] R. Byron Bird, Robert C. Armstrong et Ole Hassager. *Dynamics of Polymeric Liquids, Volume 1: Fluid Mechanics*. 2e éd. New York : Wiley, 1987.

[5] R. Byron Bird. "Useful Non-Newtonian Models". In : *Annual Review of Fluid Mechanics* 8 (1976), p. 13-34. doi : 10.1146/annurev.fl.08.010176.000305.

[6] Pierre J. Carreau. "Rheological Equations from Molecular Network Theories". In : *Transactions of the Society of Rheology* 16.1 (1972), p. 99-127. doi : https://doi.org/10.1122/1.549276.

[7] Malcolm M Cross. "Rheology of non-Newtonian fluids : a new flow equation for pseudoplastic systems". In : *Journal of colloid science* 20.5 (1965), p. 417-437.

[8] H. A. Barnes. "Shear-Thickening (Dilatancy) in Suspensions of Nonaggregating Solid Particles Dispersed in Newtonian Liquids". In : *Journal of Rheology* 33.2 (1989), p. 329-366. doi : https://doi.org/10.1122/1.550017.

[9] H. A. Barnes et K. Walters. "The Yield Stress Myth ?" In : *Rheologica Acta* 24.4 (1985), p. 323-326. doi : https://doi.org/10.1007/BF01333960.

[10] Giovanni Astarita. "Letter to the Editor : The Engineering Reality of the Yield Stress". In : *Journal of Rheology* 34.2 (1990), p. 275-277. doi : 10.1122/1.550142. url : https://doi.org/10.1122/1.550142.

[11] J Schurz. "The yield stress—an empirical reality". In : *Rheologica acta* 29.2 (1990), p. 170-171. doi : https://doi.org/10.1007/BF01332384.

[12] Ian David Evans. "Letter to the Editor : On the Nature of the Yield Stress". In : *Journal of Rheology* 36.6 (1992), p. 1313-1318. doi : 10.1122/1.550262. url : https://doi.org/10.1122/1.550262.

[13] P. H. T. Uhlherr et al. "Experimental Investigation of the Flow of Non-Newtonian Fluids". In : *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics* 125.2-3 (2005), p. 101-113. doi : 10.1016/j.jnnfm.2004.10.005.

[14] Howard A. Barnes. "The yield stress—a review or ' '—everything flows ?" In : *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics* 81.1 (1999), p. 133-178. issn : 0377-0257. doi : https://doi.org/10.1016/S0377-0257(98)00094-9.

[15] R. Byron Bird, G.C. Dai et Barbara J. Yarusso. "The Rheology and Flow of Viscoplastic Materials". In : *Reviews in Chemical Engineering* 1.1 (1983), p. 1-70. doi : doi:10.1515/revce-1983-0102.

[16] Nguyen Quoc Dzuy et D. V. Boger. "Yield Stress Measurement for Concentrated Suspensions". In : *Journal of Rheology* 27.4 (août 1983), p. 321-349. DOI : https://doi.org/10.1122/1.549709.

[17] L. J. Struble et X. Ji. "Rheology". In : *Handbook of Analytical Techniques in Concrete Science and Technology*. Sous la dir. de V. S. Ramachandran et J. J. Beaudoin. New York : William Andrew Inc., 2001.

[18] Howard A Barnes. "Thixotropy—a review". In : *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics* 70.1 (1997), p. 1-33. ISSN : 0377-0257. DOI : https://doi.org/10.1016/S0377-0257(97)00004-9.

[19] K Weissenberg. "A continuum theory of rhelogical phenomena". In : *nature* (1947). DOI : https://doi.org/10.1038/159310a0.

[20] Werner-Michael Kulicke et Ulrich Wallbaum. "Determination of first and second normal stress differences in polymer solutions in steady shear flow and limitations caused by flow irregularities". In : *Chemical Engineering Science* 40.6 (1985), p. 961-972. ISSN : 0009-2509. DOI : https://doi.org/10.1016/0009-2509(85)85009-0.

[21] Frederick Thomas Trouton. "On the coefficient of viscous traction and its relation to that of viscosity". In : *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character* 77.519 (1906), p. 426-440. DOI : https://doi.org/10.1098/rspa.1906.0038.

[22] R. K. Gupta et T. Sridhar. "Elongational Rheometers". In : *Rheological Measurement*. Sous la dir. d'A. A. Collyer et D. W. Clegg. Amsterdam : Elsevier, 1988, p. 211-245.

[23] D. F. James et K. Walters. "A Critical Appraisal of Available Methods for the Measurement of Extensional Properties of Mobile Systems". In : *Techniques in Rheological Measurement*. Sous la dir. d'A. A. Collyer. Amsterdam : Elsevier, 1994, p. 33-53.

[24] V Tirtaatmadja et T Sridhar. "A filament stretching device for measurement of extensional viscosity". In : *Journal of Rheology* 37.6 (1993), p. 1081-1102.

[25] J. R. Van Wazer et al. *Viscosity and Flow Measurement*. New York : Wiley, 1963.

[26] S. S. Sternstein, L. Ongchin et A. Silverman. "Inhomogeneous deformation and yielding of glasslike high polymers". In : *Applied Polymer Symposia* 7 (1968), p. 175-199.

[27] C. Goldstein. "Transient flow of materials with memory". In : *Transactions of the Society of Rheology* 18.3 (1974), p. 357-393.

[28] H. M. Laun et J. Meissner. "A Sandwich-Type Creep Rheometer for the Measurement of Rheological Properties of Polymer Melts at Low Shear Stresses". In : *Rheologica Acta* 19 (1980), p. 60-67.

[29] Kunihiro Osaki, Shinichi Kimura et Michio Kurata. "Relaxation of Shear and Normal Stresses in Step-Shear Deformation of a Polystyrene Solution : Comparison with the Predictions of the Doi–Edwards Theory". In : *Journal of Polymer Science : Polymer Physics Edition* 19 (1981), p. 151. DOI : 10.1002/pol.1981.180190312.

[30] TY Liu et al. "A parallel-plate rheometer for the measurement of steady-state and transient rheological properties". In : *Rheologica Acta* 22.1 (1983), p. 81-89.

[31] N Sivashinsky et al. "Some New Transient Test Results from a Parallel-Plate Rheometer". In : *Journal of Rheology* 28.3 (1984), p. 287-301.

[32] J. M. Dealy et A. J. Giacomin. "Using Large-Amplitude Oscillatory Shear". In : sous la dir. d'A. A. Collyer et D. W. Clegg. London : Elsevier, 1988, p. 327-356.

[33] Noh A Park et Thomas F Irvine Jr. "Measurements of rheological fluid properties with the falling needle viscometer". In : *Review of scientific instruments* 59.9 (1988), p. 2051-2058.

[34] G. G. Stokes. "On the Effect of the Internal Friction of Fluids on the Motion of Pendulums". In : *Transactions of the Cambridge Philosophical Society* 9.pt II (1851), p. 8-106.

[35] Moshe GOTTLIEB. "Zero-shear-rate viscosity measurements for polymer solutions by falling ball viscometry". In : *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics* 6.2 (1979), p. 97-109.

[36] AN BERIS et al. "Creeping motion of a sphere through a Bingham plastic". In : *Journal of Fluid Mechanics* 158 (1985), p. 219-244.

[37] C BISGAARD. "Velocity fields around spheres and bubbles investigated by laser-Doppler anemometry". In : *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics* 12.3 (1983), p. 283-302.

[38] AL GRAHAM et al. "Numerical simulations of eccentricity and end effects in falling ball rheometry". In : *Journal of Rheology* 33.7 (1989), p. 1107-1128.

[39] KE BENNETT et al. "Viscosity and conductivity of microemulsions". In : *Microemulsions*. Springer, 1982, p. 65-84.

[40] M. REINER. *Deformation and Flow*. New York : Wiley-Interscience, 1960.

[41] Irvin M KRIEGER et Harold ELROD. "Direct determination of the flow curves of non-Newtonian fluids. II. Shearing rate in the concentric cylinder viscometer". In : *Journal of applied physics* 24.2 (1953), p. 134-136.

[42] TMT YANG et IM KRIEGER. "Comparison of methods for calculating shear rates in coaxial viscometers". In : *journal of Rheology* 22.4 (1978), p. 413-421.

[43] S. MIDDLEMAN. *The Flow of High Polymers*. New York : Wiley-Interscience, 1968.

[44] A. YOSHIMURA et R. K. PRUD'HOMME. "Wall Slip Corrections for Couette and Parallel Disk Viscometers". In : *Journal of Rheology* 32.1 (1988), p. 53-67. DOI : 10.1122/1.549963.

[45] T KILJAŃSKI. "A method for correction of the wall-slip effect in a Couette rheometer". In : *Rheologica acta* 28.1 (1989), p. 61-64.

[46] M ABDEL-WAHAB, H GIESEKUS et M ZIDAN. "A new eccentric-cylinder rheometer". In : *Rheologica acta* 29.1 (1990), p. 16-22.

[47] M. MOONEY et R. H. EWART. "The Conicylindrical Viscometer". In : *Physics* 5 (1934), p. 350-354.

[48] RJ RUSSELL. "The determination of the basic rheological constants governing the flow of pseudoplastic substances". Thèse de doct. University of London (External Degree), 1946.

[49] A. JOBLING et J. E. ROBERTS. "An Investigation, with the Weissenberg Rheogoniometer, of the Stress Distribution in Flowing Polyisobutylene Solutions at Various Concentrations and Molecular Weights". In : *Journal of Polymer Science* 36.130 (1959), p. 433-441. DOI : 10.1002/pol.1959.1203613036.

[50] K. A. LAMMIMAN et J. E. ROBERTS. "Notes on the Measurement of Visco-Elasticity in Materials of High Viscosity". In : *Laboratory Practice* (1961), p. 816-824.

[51] R. MCKENNELL. "Cone-Plate Viscometer". In : *Proceedings of the Second International Congress on Rheology*. Sous la dir. de V. G. W. HARRISON. London : Butterworths, 1954, p. 350.

[52] N. ADAMS et A. S. LODGE. "Rheological Properties of Concentrated Polymer Solutions : II. A Cone-and-Plate and Parallel-Plate Pressure Distribution Apparatus for Determining Normal Stress Differences in Steady Shear Flow". In : *Philosophical Transactions of the Royal Society A* 256 (1964), p. 149-184.

[53] M. J. MILLER et E. B. CHRISTIANSEN. "The stress state of elastic fluids in viscometric flow". In : *AIChE Journal* 18 (1972), p. 600-608. DOI : 10.1002/aic.690180316.

[54] H. W. GREENSMITH et R. S. RIVLIN. "The hydrodynamics of non-Newtonian fluids III. The normal stress effect in high polymer solutions". In : *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A* 245 (1953), p. 399.

[55] T. Kotaka, M. Kurata et M. Tamura. "Normal Stress Effect in Polymer Solutions". In : *Journal of Applied Physics* 30.11 (1959), p. 1705-1712. DOI : 10.1063/1.1735041.

[56] H. Giesekus et G. Langer. "Die Bestimmung der wahren Fließkurven nicht-newtonscher Flüssigkeiten und plastischer Stoffe mit der Methode der repräsentativen Viskosität". In : *Rheologica Acta* 16 (1977), p. 1-22. DOI : 10.1007/BF01516925.

[57] P. R. Soskey et H. H. Winter. "Large Step Shear Strain Experiments with Parallel-Disk Rotational Rheometers". In : *Journal of Rheology* 28.5 (1984), p. 625-645. DOI : 10.1122/1.549770.

[58] D. M. Binding et K. Walters. "On the use of flow through a parallel-plate rheometer to obtain rheometrical data". In : *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics* 1 (1976), p. 277.

[59] R. W. Connelly et J. Greener. "High-Shear Viscometry with a Rotational Parallel-Disk Device". In : *Journal of Rheology* 29.2 (1985), p. 209-226. DOI : 10.1122/1.549828.

[60] J. Kramer, J. T. Uhl et R. K. Prud'homme. "Measurement of the viscosity of guar gum solutions to 50000 s^{-1} using a parallel plate rheometer". In : *Polymer Engineering & Science* 27.8 (1987), p. 598-602. DOI : 10.1002/pen.760270811.

[61] J. S. Vrentas, D. C. Venerus et C. M. Vrentas. "An exact analysis of reservoir effects for rotational viscometers". In : *Chemical Engineering Science* 46 (1991), p. 33-37.

[62] R. M. Turian. "Perturbation solution of the steady Newtonian flow in the cone and plate and parallel plate systems". In : *Industrial & Engineering Chemistry Fundamentals* 11.3 (1972), p. 361-368.

[63] E. Broyer et C. W. Macosko. "Edge effects and viscous heating in rheological measurements of polymer melts". In : *SPE Technical Papers (ANTEC)*. T. 21. 1975, p. 343.

[64] Christopher Ward Macosko. "Comparisons of Dynamic and Steady Flow Measurements for Polymer Melts". Ph.D. dissertation. Princeton, NJ : Princeton University, 1970.

[65] Christopher W. Macosko et W. M. Davis. "Dynamic mechanical measurements with the eccentric rotating disks flow". In : *Rheologica Acta* 13.4–5 (1974), p. 814-829. DOI : 10.1007/BF01527079.

[66] J. L. S. Wales. "Apparatus for the measurement of flow birefringence of polymer melts at high shear stresses". In : *Rheologica Acta* 8.1 (1969), p. 38-44.

[67] J. L. S. Wales et J. L. den Otter. "Relations between steady flow and oscillatory shear measurements". In : *Rheologica Acta* 9.1 (1970), p. 115-119.

[68] G. H. L. Hagen. "Über die Bewegung des Wassers in engen zylindrischen Röhren". In : *Annalen der Physik und Chemie* 46 (1839). En allemand : Sur le mouvement de l'eau dans des tubes cylindriques étroits, p. 423-442.

[69] L. J. Poiseuille. "Recherches sur le mouvement des liquides dans les tubes de très petits diamètres". In : *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences* 11–12 (1840–1841), 961, 1041 (1840), 112 (1841).

[70] P. Schümmer. "Zur Darstellung der Durchflußcharakteristik viskoelastischer Flüssigkeiten in Rohrleitungen". In : *Chemie Ingenieur Technik* 42.19 (1970). Titre traduit : « Représentation de la caractéristique d'écoulement des fluides viscoélastiques dans les conduites », p. 1239. DOI : 10.1002/cite.330421916.

[71] P. Schümmer et R. H. Worthoff. "An elementary method for the evaluation of a flow curve". In : *Chemical Engineering Science* 33.6 (1978). Titre traduit : « Une méthode élémentaire pour l'évaluation d'une courbe d'écoulement », p. 759-763. DOI : 10.1016/0009-2509(78)80054-2.

[72] H. M. Laun. "Polymer melt rheology with a slit die". In : *Rheologica Acta* 22 (1983), p. 171-185. DOI : 10.1007/BF01332370.

[73] H. M. Laun et G. Hirsch. "New laboratory tests to measure rheological properties of paper coatings in transient and steady-state flows". In : *Rheologica Acta* 28 (1989), p. 267-280. DOI : 10.1007/BF01329336.

[74] Sébastien CANDEL. *Mécanique des fluides*. dunod-2eme ed. edition, 2001.