الجمهورية الجزائرية الديموقراطية الشعبية
People's Democratic Republic of Algeria

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
Ministry of Higher Education and Scientific Research

المدرسة الوطنية العليا للتكنولوجيات المتقدمة
National Higher School of Advanced Technologies

Département d'électrotechnique

Mémoire de fin d'étude en vue de l'obtention du diplôme

De MASTER

Filière

Electrotechnique

Spécialité

Traction électrique

Thème

Étude et simulation du chaos dans les systèmes non linéaires

Réalisé par

Fares SEBTI

Soutenu le **30/06/2025**

Membres de Jury

Prénom NOM	Université	Grade	Qualité
M. Belkacem SAGHI	ENSTA	MCB	Président
M. Mahmoud ARBID	ENSTA	MCA	Rapporteur
M. Hammou TEBIBEL	CDER	Directeur de recherche	Co-Rapporteur
M. M'Hamed OUADAH	ENSTA	MCA	Examinateur

2024/2025

Remerciements

Avant toute chose, je tiens à exprimer ma profonde gratitude à ma mère, pour son amour inconditionnel, ses prières, et son soutien constant tout au long de mon parcours.

Je remercie également mes sœurs et mes beaux-frères, mes amis pour leur présence, leur encouragement et leur confiance en moi.

Je tiens à adresser mes sincères remerciements à mon encadrant, pour son accompagnement, sa patience et la richesse de ses conseils, qui ont été essentiels à la réalisation de ce travail.

Enfin, une pensée profonde va à une âme chère qui nous a quittés, dont l'absence me pèse, mais dont le souvenir reste une lumière silencieuse guidant mes pas.

ملخص

يُقدّم هذا الفصل المفاهيم الأساسية للفوضى في الأنظمة غير الخطية، مع التركيز على خصائصها الرئيسية مثل اللاخطية، الحتمية، الحساسية للشروط الابتدائية، وجاذبات الفوضى. كما يتم عرض أدوات التحليل مثل مؤشرات ليابونوف ومقطع بوانكاريه. تركز الدراسة لاحقًا على نظامين فوضويين شهيرين: دارة تشوا ونظام تشين، مع تحليل سلوكاتهما الديناميكية وانتقالهما نحو الفوضى. ويُختتم الفصل بمناقشة طرق التحكم في الفوضى من خلال تثبيت المدارات الدورية غير المستقرة.

الكلمات المفتاحية الفوضى، الأنظمة غير الخطية، الحساسية للشروط الابتدائية، الجاذب الغريب، مؤشرات ليابونوف، مقطع بوانكاريه، دارة شوا، المدار الدوري غير المستقر.

Résumé

Ce mémoire présente les notions fondamentales du chaos dans les systèmes non linéaires, en mettant en évidence leurs propriétés : non-linéarité, déterminisme, sensibilité aux conditions initiales et attracteurs étranges. Il introduit également les outils d'analyse comme les exposants de Lyapunov et la section de Poincaré. L'étude se concentre ensuite sur deux systèmes chaotiques emblématiques, le circuit de Chua et le système de Chen, en analysant leurs comportements dynamiques et les transitions vers le chaos. Enfin, il aborde la problématique du contrôle du chaos via la stabilisation des orbites périodiques instables.

Mots clés : Chaos, systèmes non linéaires, sensibilité aux conditions initiales, attracteur étrange, exposants de Lyapunov, section de Poincaré, circuit de Chua, orbite périodique instable.

Abstract

This work introduces the fundamental concepts of chaos in nonlinear systems, highlighting key properties such as nonlinearity, determinism, sensitivity to initial conditions, and strange attractors. Analytical tools like Lyapunov exponents and Poincaré sections are presented. The study then focuses on two well-known chaotic systems: Chua's circuit and the Chen system, analyzing their dynamic behaviors and the transition to chaos. Finally, the chapter addresses chaos control through the stabilization of unstable periodic orbits.

Keywords: Chaos, nonlinear systems, sensitivity to initial conditions, strange attractor, Lyapunov exponents, Poincaré section, Chua's circuit, unstable periodic orbit.

Table des matières

Table des figures

Liste des tableaux

Abbréviations

1 Étude du comportement des systèmes chaotiques **1**

1.1 Introduction . . . 1
1.2 Notion du choas . . . 2
1.2.1 Non-linéarité . . . 2
1.2.2 Déterminisme . . . 2
1.2.3 Aspect aléatoire . . . 2
1.2.4 Sensibilité aux conditions initiales . . . 2
1.2.5 Exposant de Lyaponov . . . 3
1.2.6 Section de Poincaré . . . 3
1.2.7 Notion d'attracteur . . . 4
1.3 Contexte et finalité de la méthode de contrôle proposée . . . 5
1.4 Orbite périodique instable (OPI) . . . 6
1.5 Circuit de Chua . . . 7
1.5.1 Présentation de circuit Chua . . . 8
1.5.2 La diode de chua . . . 9
1.5.3 Modèle mathématique . . . 9
1.5.4 Diagramme de bifurcation . . . 11
1.5.5 Analyse du comportement dynamique . . . 12
1.5.6 Sensibilité aux conditions initiales . . . 15
1.5.7 Exposants de Lyapunov . . . 16
1.5.8 Méthode de calcul des exposants de Lyapunov . . . 17

1.5.9 Spectre des exposants de lyapunov 17
1.6 Système de Chen 18
1.6.1 Diagramme e bifurcation du système de Chen 19
1.6.2 Analyse du comportement dynamique du système de Chen 19
1.6.3 Sensibilité aux conditions initiales du système de Chen 23
1.6.4 Exposant de lyaponov du système de Chen 24
1.7 Conclusion 25

Bibliographie **26**

Table des figures

1.1 Circuit de chua 8
1.2 Diode de chua 9
1.3 Caractéristique de la résistance non-linéaire de Chua 10
1.4 Diagramme de bifurcation du système de Chua. 11
1.5 Système de Chua pour α=2 : (a) Attracteur 3D, (b) Évolutions temporelles. 12
1.6 Système de Chua pour α=6.5 : (a) Attracteur 3D, (b) Évolutions temporelles. 12
1.7 Système de Chua pour α=8 : (a) Attracteur 3D, (b) Évolutions temporelles. 13
1.8 Système de Chua pour α=10 : (a) Attracteur 3D, (b) Évolutions temporelles. 13
1.9 Plan de phases du Système de Chua : (a) Attracteur 3D, (b) Plan de phase XY, (c) Plan de phase XZ, (d) Plan de phase YZ. 15
1.10 Sensibilité aux conditions initiales et divergence des trajectoires pour le système de Chua : $X_0 = (-0.1, -0.1, -0.1)$ (En rouge), $X_0' = (-0.1+10^{-14}, -0.1, -0.1)$ (En bleu), (a) $x(t)$, (b) $y(t)$, (c) $z(t)$. 16
1.11 Évolution des exposants de Lyapunov 18
1.12 Diagramme de bifurcation du système de Chen. 19
1.13 Système de Chen pour c=15 : (a) Attracteur 3D, (b) Évolutions temporelles 20
1.14 Système de Chen pour c=19 : (a) Attracteur 3D, (b) Évolutions temporelles 20
1.15 Système de Chen pour c=20.07 : (a) Attracteur 3D, (b) Évolutions temporelles 21
1.16 Système de Chen pour c=28 : (a) Attracteur 3D, (b) Évolutions temporelles 21
1.17 Plan de phases du Système de Chen : (a) Attracteur 3D, (b) Plan de phase XY, (c) Plan de phase XZ, (d) Plan de phase YZ 22
1.18 Sensibilité aux conditions initiales et divergence des trajectoires pour le système de Chen : $X_1 = (-3, 2, 20)$ (En rouge), $X_2 = (-3+10^{-5}, 2, 20)$ (En bleu), (a) $x(t)$, (b) $y(t)$, (c) $z(t)$. 23
1.19 Évolution des exposants de Lyapunov du système de Chen 24

Liste des tableaux

1.1 Étude comparative du comportement dynamqiue 17

Abréviations

OGY : Ott, Grebogi, Yorke

OPI : Orbite périodique instable

Chapitre 1

Étude du comportement des systèmes chaotiques

1.1 Introduction

Les systèmes dynamiques non linéaires jouent un rôle fondamental dans la modélisation de nombreux phénomènes naturels, techniques et électroniques. Parmi les comportements complexes qu'ils peuvent engendrer, le chaos se distingue par sa nature déterministe mais imprévisible, où une légère variation des conditions initiales peut conduire à des trajectoires radicalement différentes.

Ce chapitre a pour objectif de présenter les principales propriétés des systèmes chaotiques, telles que la sensibilité aux conditions initiales, les attracteurs étranges, les exposants de Lyapunov et les sections de Poincaré. Il s'appuie sur deux exemples emblématiques : le circuit de Chua et le système de Chen, dont les comportements dynamiques seront étudiés à travers des simulations et des outils d'analyse mathématique.

Parmi les différentes méthodes de contrôle existantes et d'après nos lectures, aucune approche universelle ne permet de réguler tous les systèmes chaotiques [1]. Chaque système possède des caractéristiques intrinsèques spécifiques et adopte un comportement distinct des autres, ce qui rend nécessaire une adaptation des stratégies de contrôle à chaque cas particulier. Ainsi, ce chapitre constitue une base essentielle pour comprendre les dynamiques chaotiques avant d'aborder la problématique du contrôle.

1.2 Notion du choas

Le concept du chaos selon les scientifiques n'implique pas l'absence d'ordre. Au contraire, il fait référence à une idée d'imprévisibilité, où il est impossible de prévoir les changements à long terme, car le résultat final est très influencé par l'état initial.

Un système dynamique est qualifié de chaotique lorsqu'il dépend de plusieurs facteurs et présente une très grande sensibilité aux conditions initiales. Ces systèmes ne peuvent pas être prédits ou modélisés à l'aide d'équations linéaires ni par les principes de la mécanique traditionnelle, mais cela ne signifie pas qu'ils sont totalement aléatoires, car ils relèvent également des probabilités. Pour mieux comprendre les systèmes chaotiques, on utilise quelques définitions et caractéristiques.

1.2.1 Non-linéarité

Un système chaotique est un système dynamique qui n'est pas linéaire. Un système linéaire ne peut pas présenter de aspects chaotiques.

1.2.2 Déterminisme

Un système déterministe se définit comme un système dont l'état actuelle est entièrement dépendante de conditions initiales, contrairement à un système stochastique où l'état présent montre les conditions initiales ainsi qu'une réalisation spécifique d'un paramètre aléatoire (bruit ou variable interne).

1.2.3 Aspect aléatoire

Chaque état d'un système chaotique montre des caractéristiques aléatoires.

1.2.4 Sensibilité aux conditions initiales

La sensibilité aux conditions initiales fait référence au fait que, dans un système chaotique, chaque point peut être très proche d'autres points qui auront des trajectoires d'avenir sensiblement différentes. Par conséquent, même un léger changement aléatoire ou une perturbation dans le parcours en cours peut mener à un comportement futur notablement distinct. Ce concept est largement connu sous le nom d'« effet papillon ». Ce terme provient du titre d'un article rédigé par Edward Lorenz en 1972 pour l'Association américaine pour l'avancement des sciences à Washington, DC. L'article s'intitulait : Prévisibilité : un battement d'ailes

d'un papillon au Brésil peut-il provoquer une tornade au Texas.Le battement d'ailes symbolise un petit ajustement dans l'état initial d'un système, ce qui déclenche une série d'événements aboutissant à des manifestations à grande échelle. Si le papillon n'avait pas battu des ailes, la trajectoire du système aurait pu être radicalement différente. Une conséquence de la sensibilité aux conditions initiales est que lorsque l'on commence avec une quantité d'informations limitée sur le système, comme c'est souvent le cas dans les pratiques réelles, le système devient imprévisible après un certain temps. Cela est particulièrement vrai pour la météo, qui peut généralement être anticipée seulement jusqu'à une semaine à l'avance. Bien sûr, cela ne signifie pas que nous ne pouvons rien anticiper pour le futur lointain, il existe certaines limites sur ce que le système peut faire. Par exemple, nous savons que la température sur Terre ne pourra jamais atteindre 100 degrés Celsius ou descendre à -130 degrés Celsius, mais nous ne pouvons pas prédire exactement quel jour sera le plus chaud de l'année [2]. Il y a aussi d'autres caractéristiques qui se rapportent à la réaction des conditions initiales.

1.2.5 Exposant de Lyaponov

L'évolution chaotique peut être difficile à comprendre en raison de la rapidité avec laquelle les trajectoires sur l'attracteur divergent. Pour cette raison, il est essentiel d'essayer de mesurer ou d'évaluer la rapidité de cette divergence ou convergence si possible. Cette rapidité est déterminée par l'exposant de Lyapunov, qui indique combien deux trajectoires très similaires se séparent. Les exposants de Lyapunov étendent les valeurs propres liées aux points fixes et aux multiplicateurs associés aux solutions périodiques. Dans le cas d'un attracteur non chaotique, tous les exposants de Lyapunov sont inférieurs ou égaux à zéro, et leur somme est négative. En revanche, un attracteur étrange aura toujours au moins trois exposants de Lyapunov, dont au moins l'un doit être positif [3].

1.2.6 Section de Poincaré

En mathématiques, au sein de la théorie des systèmes dynamiques, la section de Poincaré désigne le point où une trajectoire (qu'elle soit périodique, quasi-périodique ou chaotique) croise un hyperplan ayant une dimension inférieure dans un espace d'au moins trois dimensions. On peut ainsi voir comment la trajectoire revient vers l'hyperplan, à partir d'un point spécifique. L'ensemble des points que la trajectoire touche sur l'hyperplan est connu sous le nom de plan de Poincaré [4]. Considérons $x(x_0, t_0, t) = \varphi_t(x_0)$, qui représente une solution d'un système autonome tel que $\dot{x} = f(x)$.Nous introduisons localement un hyperplan $\Sigma \subset R^n$, qui a une dimension de $n-1$ et qui est transversal au champ de vecteurs f en x_0. Imaginons

maintenant un point x situé dans le voisinage $V \subset \Sigma$ de x_0. L'application de Poincaré, notée $P : V \to \Sigma$, est alors établie comme suit :

$$x_1 = P(x) = \varphi_\tau(x)$$

où $\tau = \tau(x)$ désigne le temps après lequel la trajectoire revient et rencontre Σ pour la première fois. L'hyperplan Σ est désigné comme étant la section de Poincaré. Cette section de Poincaré remplace le système dynamique continu par un système qui évolue en temps discret. C'est une manière d'observer le système par échantillonnage, utilisant une paramétrisation qui doit être choisie avec soin pour obtenir le plus d'informations possible [4].

1.2.7 Notion d'attracteur

Dans l'analyse des systèmes dynamiques, un attracteur, également appelé ensemble-limite, représente un ensemble ou un espace vers lequel un système se déplace de façon irréversible en l'absence de perturbations. Cinq catégories d'attracteurs, qui sont essentielles à la théorie du chaos, sont identifiées : point, point périodique, périodique, étrange et spatial. Dans un espace des phases à deux dimensions, les attracteurs se manifestent sous forme de points ou de cycles limites. Pour tous les attracteurs dits réguliers, ce qui inclut tous les systèmes non chaotiques, les trajectoires qui émanent de "points" proches les uns des autres dans l'espace de phase demeurent continuellement proches. Par conséquent, il est possible de prévoir l'évolution de ces systèmes à partir d'une condition initiale. Les systèmes qui ne comportent que deux variables ne peuvent pas aboutir à des mouvements chaotiques : l'ajout d'une troisième variable est suffisant pour que de tels systèmes deviennent instables dans certaines situations [5]. L'attracteur chaotique, souvent appelé étrange, n'est pas un objet lisse, mais plutôt une surface repliée sur elle-même de nombreuses fois. En réalité, les trajectoires des points se séparent (car par définition, deux points ne peuvent évoluer de la même manière), mais étant donné que l'attracteur a des dimensions limitées, il est contraint de se replier sur lui-même. Le bassin d'attraction d'un attracteur représente l'ensemble des points dans l'espace des phases qui mènent vers une trajectoire convergeant vers l'attracteur en question. Ainsi, il est possible d'avoir plusieurs attracteurs au sein d'un même espace des phases. On peut identifier deux catégories d'attracteurs : les attracteurs réguliers et les attracteurs étranges ou chaotiques [6].

1.2.7.1 Attracteur régulier

Les attracteurs réguliers décrivent l'évolution des systèmes qui ne présentent pas de chaos et se divisent en deux types :

1. Un point fixe : la trajectoire d'un pendule dissipatif simple (dans l'espace des phases qui illustre son altitude et sa vitesse), par exemple, se dirige vers l'origine du système, peu importe la position et la vitesse initiales.
2. Un cycle limite : la trajectoire d'un pendule idéal dans cet même espace des phases, par exemple. Pour tous les attracteurs réguliers, c'est-à-dire pour tous les systèmes non chaotiques, les trajectoires qui partent de "points" proches dans l'espace de phase 1 demeurent constamment voisines. Il est donc possible de prédire l'évolution de ces systèmes en partant d'une situation connue.

1.2.7.2 Attracteur étrange

Un attracteur est qualifié d'étrange s'il possède une structure fractale. Cela se produit souvent lorsque la dynamique associée est chaotique, bien qu'il existe également des attracteurs étranges qui ne sont pas chaotiques. Le terme a été créé par David Ruelle et Floris Takens pour désigner l'attracteur qui émerge après une série de bifurcations d'un système décrivant le mouvement d'un fluide [7].

1.3 Contexte et finalité de la méthode de contrôle proposée

C'est pourquoi c'est essentiel de consacrer ce chapitre à une contribution visant à proposer une procédure de contrôle capable de maîtriser le comportement chaotique dans la majorité des systèmes chaotiques continus. La technique proposée, à la fois simple et efficace, repose sur la méthode OGY et le contrôle à retard d'état. Elle a pour objectif de contrôler un large éventail de systèmes chaotiques et de démontrer son efficacité à travers plusieurs exemples [8, 9]. Ses applications sont vastes, allant du contrôle des fluides turbulents à la transmission de signaux chaotiques, en passant par le codage et le décodage d'informations ou encore la régulation des vibrations cardiaques. Le système contrôlé doit évoluer dans un domaine où il conserve naturellement ses propriétés dynamiques et chaotiques. L'approche consiste à lui imposer une trajectoire définie, qui correspond à une orbite périodique instable, de sorte

qu'il adopte un comportement prévisible et périodique. Ainsi, nous nous fixons les objectifs suivants :

- Fiabilité du contrôle : il doit être applicable indépendamment du moment où l'algorithme est mis en œuvre.
- Rapidité de transition : la mise en place du contrôle doit être rapide et immédiatement efficace.
- Durabilité : une fois stabilisé, le système contrôlé doit le rester sur le long terme.
- Non-destructivité : le contrôle ne doit pas altérer fondamentalement les propriétés dynamiques du système ni le dénaturer.

1.4 Orbite périodique instable (OPI)

Dans les systèmes discrets, la correction est appliquée instantanément à chaque fois que la trajectoire passe près du point fixe. En revanche, dans un système dynamique continu, l'évolution se fait progressivement, ce qui signifie qu'un certain délai est nécessaire pour que le système réagisse à une action corrective. Il est donc plus réaliste de considérer qu'il existe un retard entre le calcul de la correction et son application effective. Ce retard constitue un paramètre à ajuster. L'algorithme de contrôle de ces systèmes repose sur les étapes suivantes :

- Détection du passage par le point fixe : La trajectoire est considérée comme proche du point fixe lorsqu'elle se situe dans un cercle unitaire autour de celui-ci, dans le plan de la variable d'état choisie.
- Calcul de la loi de contrôle.
- Application d'un contrôle retardé : Contrairement à la méthode de Pyragas [9], la méthode OGY est conservée, mais un retard est introduit via un élément spécifique pour différer l'application du contrôle. Cette étape est particulièrement délicate une fois le contrôle bien défini.

Une orbite périodique est représentée par des points fixes dans la section de Poincaré, ce qui signifie que la trajectoire du système est censée revisiter le voisinage de ces points selon la loi de contrôle. Lorsqu'une variable d'état du système entre dans cette région, on cherche à orienter la prochaine variable d'état vers la direction stable en appliquant une légère perturbation paramétrique. Autrement dit, on introduit une déviation $\delta x(i) = x(i) - x_f$ afin d'amener progressivement la trajectoire sur une direction stable linéarisée.[10]

La loi de contrôle est directement dérivée de la section de Poincaré :

$$\delta p(i) = \frac{\partial p}{\partial x_f}(x(i) - x_f) \tag{1.1}$$

Le terme $\frac{\partial p}{\partial x_f}$ représente l'impact d'une légère variation paramétrique sur la modification du point fixe. Cette loi de contrôle agit immédiatement sur le système. Toutefois, dans certaines situations réelles, l'évolution future d'un système chaotique dépend non seulement de la variation paramétrique actuelle, mais aussi des variations précédentes. Par conséquent, le système met un certain temps à réagir à la correction et à s'aligner sur la trajectoire souhaitée. Il est donc pertinent de considérer un délai avant d'appliquer la loi de contrôle et d'ajuster le paramètre de contrôle. Cette approche a été mise en œuvre en incorporant la valeur précédente du paramètre de contrôle dans la loi de contrôle, dont l'influence est définie par [11] :

$$\delta p(i) = \frac{\partial p}{\partial x_f}(x(i) - x_f) + \gamma \delta p(i-1) \tag{1.2}$$

D'un point de vue qualitatif, une fois le contrôle activé, le système suit de manière stable sa nouvelle trajectoire tout au long de son évolution. Cette stabilité est garantie par un choix approprié du paramètre γ, permettant un contrôle efficace de chaque système chaotique.

La conception de la loi de contrôle repose sur la linéarisation autour du point fixe. L'application du contrôle se limite au voisinage immédiat de ce point. Ainsi, la région de contrôle est définie par l'ensemble des points suivants :

$$\left\{\delta : \delta x_1^2(i) + \delta x_2^2(i) < 1\right\} \tag{1.3}$$

Ces points forment un cercle unitaire centré sur le point fixe à stabiliser. On considère que tout point situé à proximité immédiate de ce point fixe finira par rejoindre son voisinage local et sera ainsi contrôlé [1].

1.5 Circuit de Chua

Le circuit Chua a été inventé à l'automne 1983 (Chua, 1992) en réponse à deux demandes non satisfaites de nombreux chercheurs sur le chaos concernant deux aspects des équations de Lorenz (Lorenz, 1963). La première quête consistait à concevoir un système de laboratoire qui puisse être modélisé de manière réaliste par les équations de Lorenz afin de démontrer que le chaos est un phénomène physique robuste, et pas seulement un artefact d'erreurs d'arrondi informatique. Le deuxième objectif était de prouver que l'attracteur de Lorenz, obtenu par simulation informatique, est effectivement chaotique dans un sens mathématique rigoureux. L'existence d'attracteurs chaotiques à partir du circuit de Chua a été confirmée numériquement par Matsumoto (1984), observée expérimentalement par Zhong et Ayrom (1985), et prouvée rigoureusement dans (Chua, et al, 1986). L'approche fondamentale de la

preuve est illustrée dans un exercice guidé sur le circuit de Chua dans le célèbre manuel de Hirsch, Smale et Devaney (2003) [12].

1.5.1 Présentation de circuit Chua

Pour qu'un circuit électronique présente un comportement chaotique, il doit satisfaire certains critères, appelés critères chaotiques. Ces conditions incluent :

— La présence d'au moins un élément non linéaire.

— L'inclusion d'au moins une résistance localement active.

— L'intégration d'au moins trois éléments de stockage d'énergie.

En 1983, l'ingénieur Leon Ong Chua a conçu le circuit électronique le plus simple répondant à ces critères. Ce circuit est composé de deux condensateurs, d'une bobine, d'une résistance active et de la diode de Chua [13].

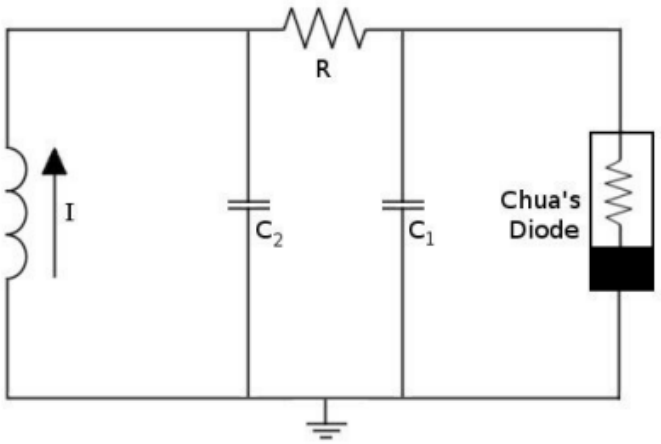


FIGURE 1.1 – Circuit de chua

L'attracteur chaotique de ce circuit de troisième ordre a été mis en évidence pour la première fois par T. Matsumoto à l'aide de simulations informatiques [14].

$$\begin{cases} C_1 \frac{dV_1}{dt} = \frac{V_2 - V_1}{R} - f(V_1) \\ C_2 \frac{dV_2}{dt} = \frac{V_1 - V_2}{R} + i \\ L \frac{di}{dt} = -V_2 \end{cases} \tag{1.4}$$

1.5.2 La diode de chua

La diode de Chua constitue l'élément non linéaire du circuit. Il s'agit d'une résistance active non linéaire pouvant être décrite par des équations linéaires par morceaux. Elle représente la partie fondamentale du circuit de Chua, qui est un oscillateur simple capable de générer des oscillations chaotiques.

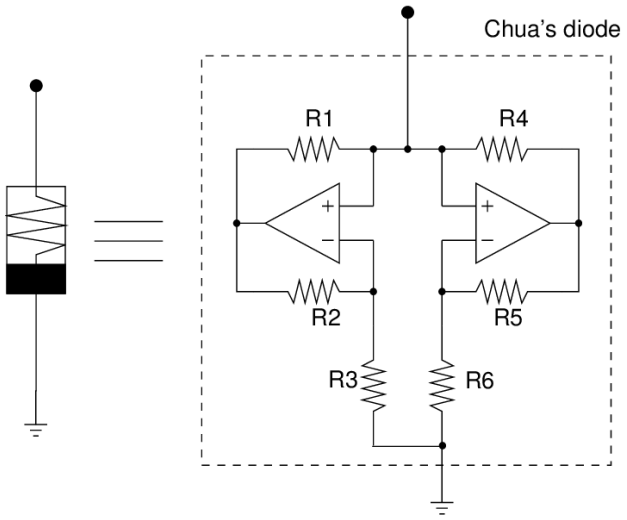


FIGURE 1.2 – Diode de chua

Ce circuit est largement utilisé comme modèle de système chaotique. N'étant pas disponible dans le commerce, la diode de Chua est généralement réalisée à l'aide de composants électroniques courants tels que des diodes, des condensateurs, des résistances et des amplificateurs opérationnels. Cette résistance non linéaire possède une caractéristique courant-tension non linéaire, décrite par la fonction $f(V_1)$ dans l'équation (1.4). L'équation $f(V_1)$ est définie par :

$$f(V_1) = m_0 V_1 + \frac{1}{2}(m_1 - m_0)|V_1 + B_p| + \frac{1}{2}(m_0 - m_1)|V_1 - B_p| \tag{1.5}$$

avec :

m_0, m_1 : tangentes intérieure et extérieure respectivement

$\pm B_p$: points de rupture

1.5.3 Modèle mathématique

Un système non linéaire peut présenter un comportement en régime permanent plus complexe que les dynamiques classiques, telles que les oscillations périodiques ou quasi-périodiques. Dans ce cas, sa sortie devient extrêmement sensible aux conditions initiales, ce

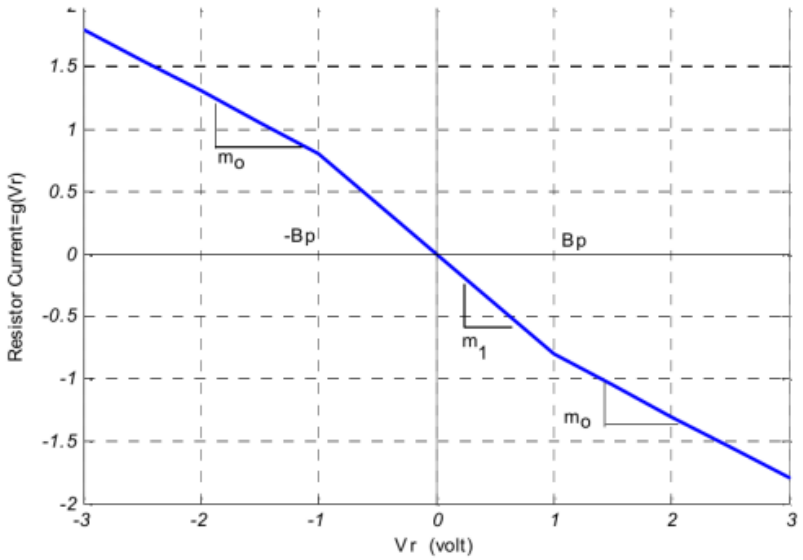


FIGURE 1.3 – Caractéristique de la résistance non-linéaire de Chua

qui entraîne une imprévisibilité à long terme. Un tel système est alors qualifié de chaotique[15].

Le circuit de Chua du système (1.1) est défini par l'ensemble des équations différentielles d'ordre 3 suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha(y - x - g(x)) \\ \dot{y} = x - y + z \\ \dot{z} = -\beta y \end{cases} \tag{1.6}$$

où

$$g(x) = m_1 x + \frac{m_0 - m_1}{2}\left(|x+1| - |x-1|\right) \tag{1.7}$$

représente l'élément non linéaire du circuit avec :

$$g(x) = \begin{cases} m_1 x + (m_0 - m_1) & \text{si } x \geq 1 \\ m_0 x & \text{si } |x| < 1 \\ m_1 x - (m_0 - m_1) & \text{si } x \leq -1 \end{cases} \tag{1.8}$$

Les points fixes du système sont donnés par :

$$C_0 = (0, 0, 0)$$

ainsi que deux points fixes :

$$C_1 = \left(\frac{m_1 - m_0}{m_1 + 1}, 0, \frac{m_0 - m_1}{m_1 + 1}\right), \quad C_{-1} = \left(\frac{m_0 - m_1}{m_1 + 1}, 0, \frac{m_1 - m_0}{m_1 + 1}\right)$$

1.5.4 Diagramme de bifurcation

Pour retrouver les seuils de bifurcation et leur nature en fonction du paramètre α, nous avons effectué des simulations en faisant varier α de 7 à 8.6 avec un pas d'itération de 0.01. La figure (1.4) représente l'évolution de la variable y obtenue en fonction des valeurs du paramètre α à chaque itération. Pour l'étude de ce système, les paramètres (β, m_0, m_1)=

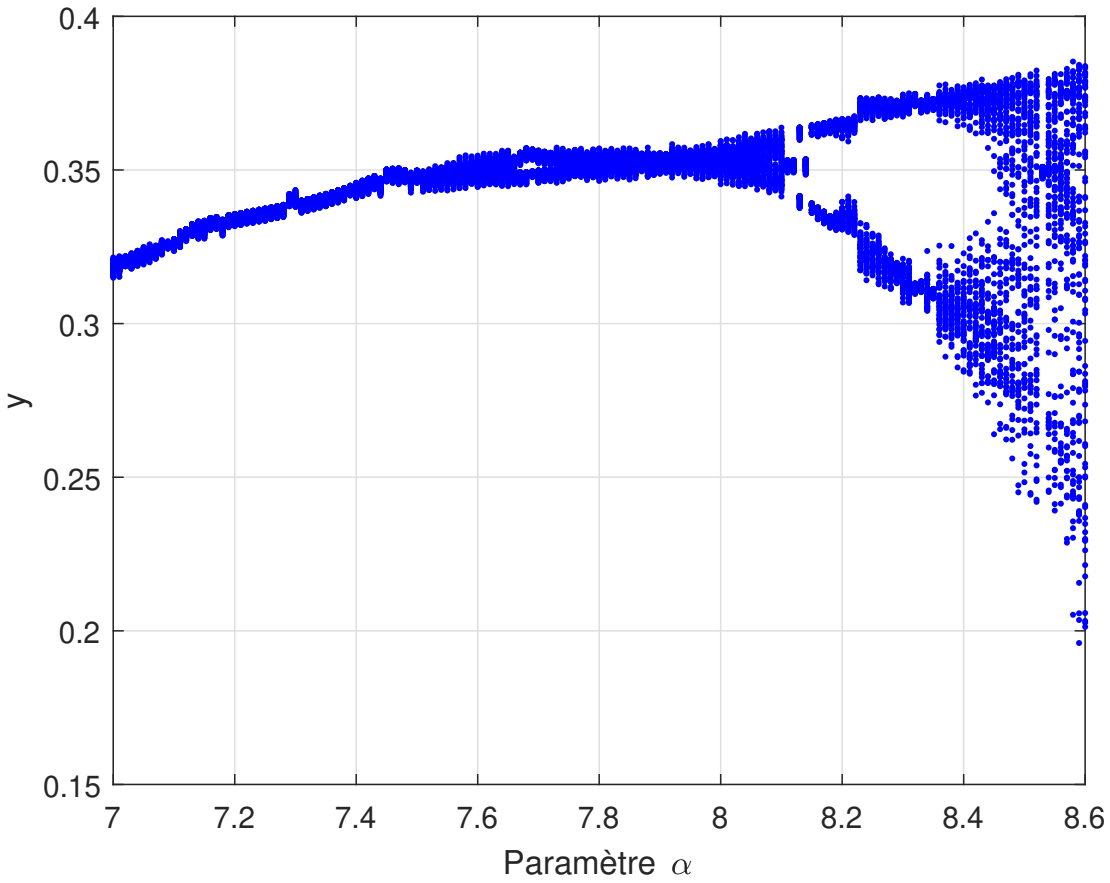


FIGURE 1.4 – Diagramme de bifurcation du système de Chua.

(14.87, -1.27, -0.68), et α est considérée comme une variable. En considérant deux conditions initiales presque identiques et pour des valeurs de α égales à 7 et 8.6, on évalue le taux de divergence entre les orbites générées par les deux évolutions. À ces valeurs de α, le système manifeste deux comportements distincts en partant des conditions initiales : (x, y, z) = (-0.1, -0.1, -0.1).

1.5.5 Analyse du comportement dynamique

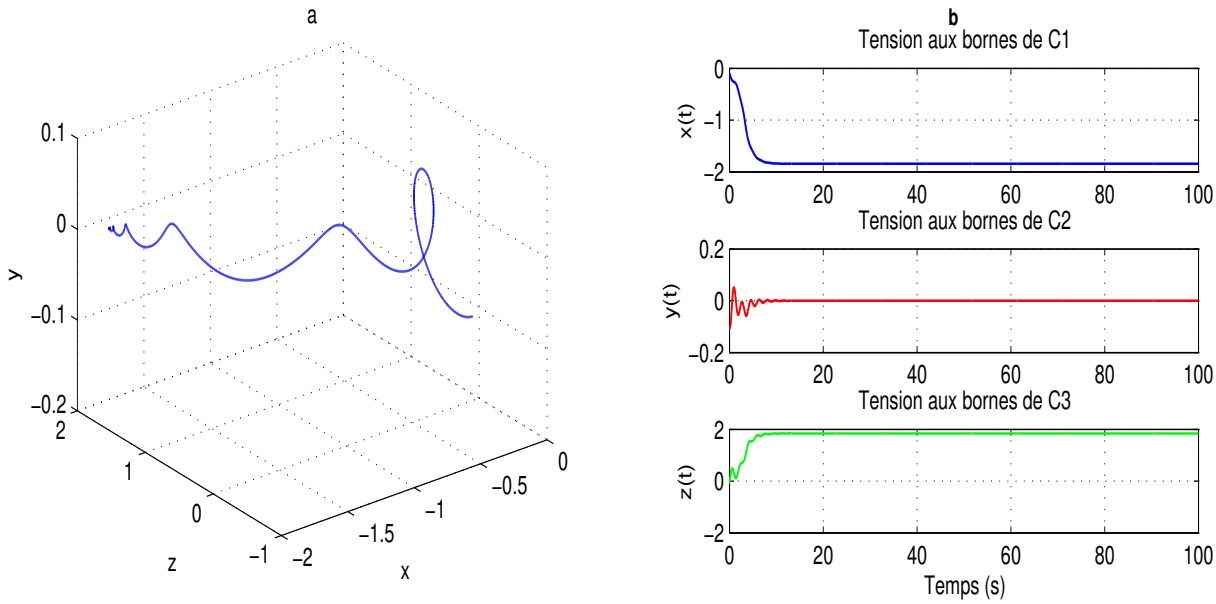


FIGURE 1.5 – Système de Chua pour α=2 : (a) Attracteur 3D, (b) Évolutions temporelles.

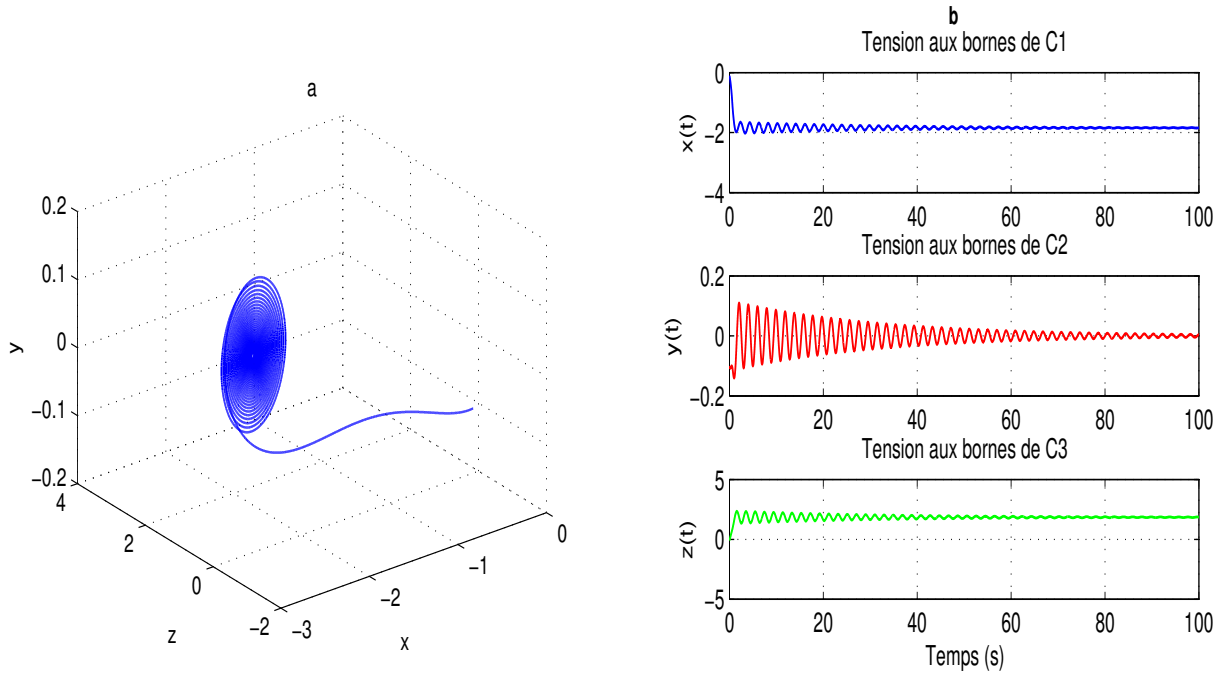


FIGURE 1.6 – Système de Chua pour α=6.5 : (a) Attracteur 3D, (b) Évolutions temporelles.

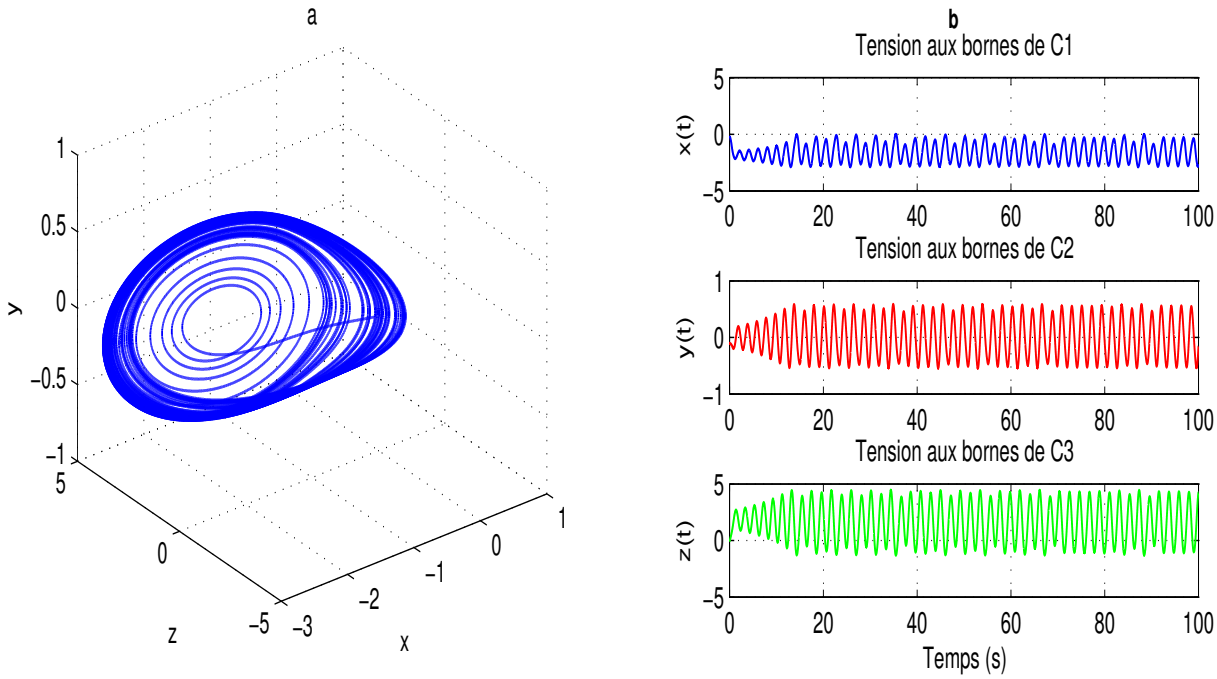


FIGURE 1.7 – Système de Chua pour α=8 : (a) Attracteur 3D, (b) Évolutions temporelles.

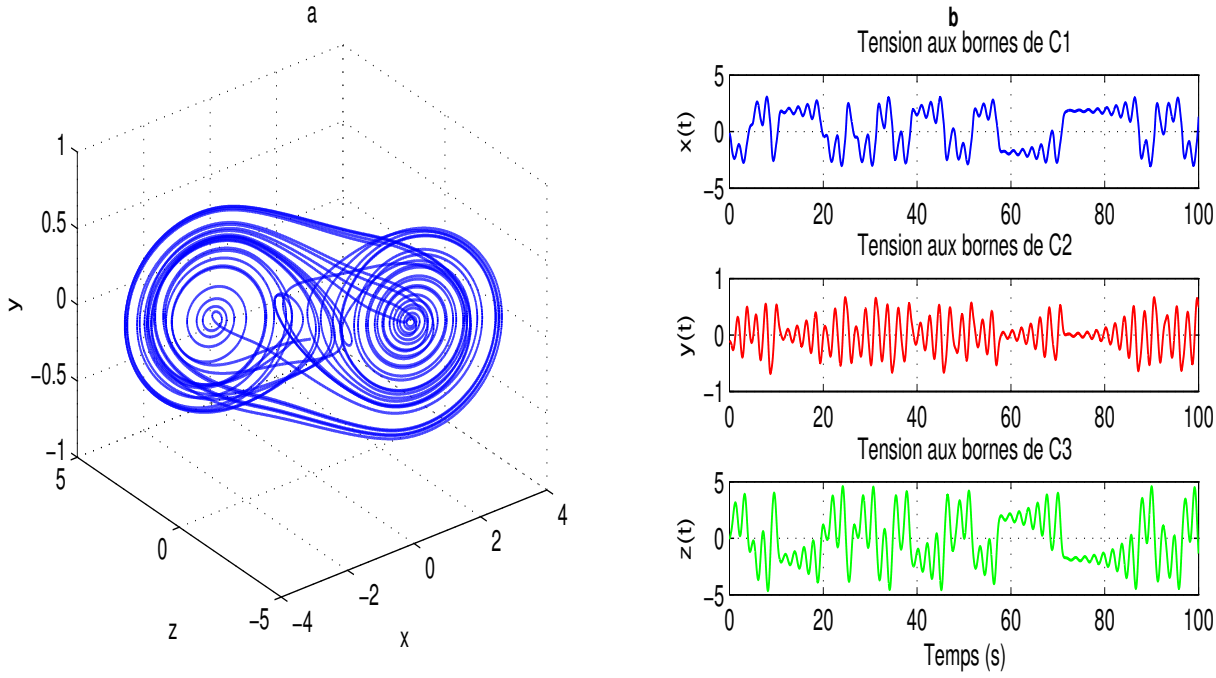


FIGURE 1.8 – Système de Chua pour α=10 : (a) Attracteur 3D, (b) Évolutions temporelles.

Pour $\alpha = 2$, le système présente un régime périodique caractérisé par des oscillations régulières et persistantes dans le temps. Les trajectoires temporelles ne s'atténuent pas, mais restent confinées dans une zone de l'espace des phases, traduisant la présence d'un cycle limite stable. L'attracteur 3D montre une boucle fermée ou faiblement spiralée, sans grande complexité, indiquant une dynamique ni stationnaire ni chaotique, mais purement périodique.

Pour $\alpha = 6.5$, le système montre des oscillations qui ne s'arrêtent pas et ne se répètent jamais exactement. C'est un régime quasi-périodique. Les courbes oscillent en permanence, sans s'atténuer ni se stabiliser. Dans l'espace des phases, l'attracteur évolue autour d'une forme en tore, typique du quasi-périodique. Ce comportement résulte d'un équilibre entre non-linéarité et dissipation, caractéristique d'une transition entre un régime périodique et un régime chaotique

Lorsque $\alpha = 8$, le système entre dans un régime chaotique caractérisé par un attracteur de Chua bien formé. Les trajectoires temporelles révèlent des oscillations persistantes et irrégulières, signes typiques d'un comportement non périodique. L'attracteur présente une structure complexe qui traduit l'instabilité dynamique du système.

À $\alpha = 8.6$, le chaos est encore plus marqué, et l'augmentation de la valeur de α amplifie la complexité de l'attracteur. Cela indique un renforcement du caractère chaotique du système.

Ces résultats montrent clairement comment le paramètre α influence le comportement dynamique du circuit de Chua, en passant d'un régime stable à un régime chaotique. On s'intresse au dernier cas qui présente un attracteur étrange pour les valeurs paramétriques (α, β, m_0, m_1)= (10, 14.87, -1.27, -0.68).

Les résultats de simulation confirment que le système (1.6) présente un comportement chaotique déterministe, caractérisé par un attracteur étrange. La structure repliée observée dans l'espace des états, ainsi que les projections de planes de phases, révèlent une dynamique complexe et non périodique.

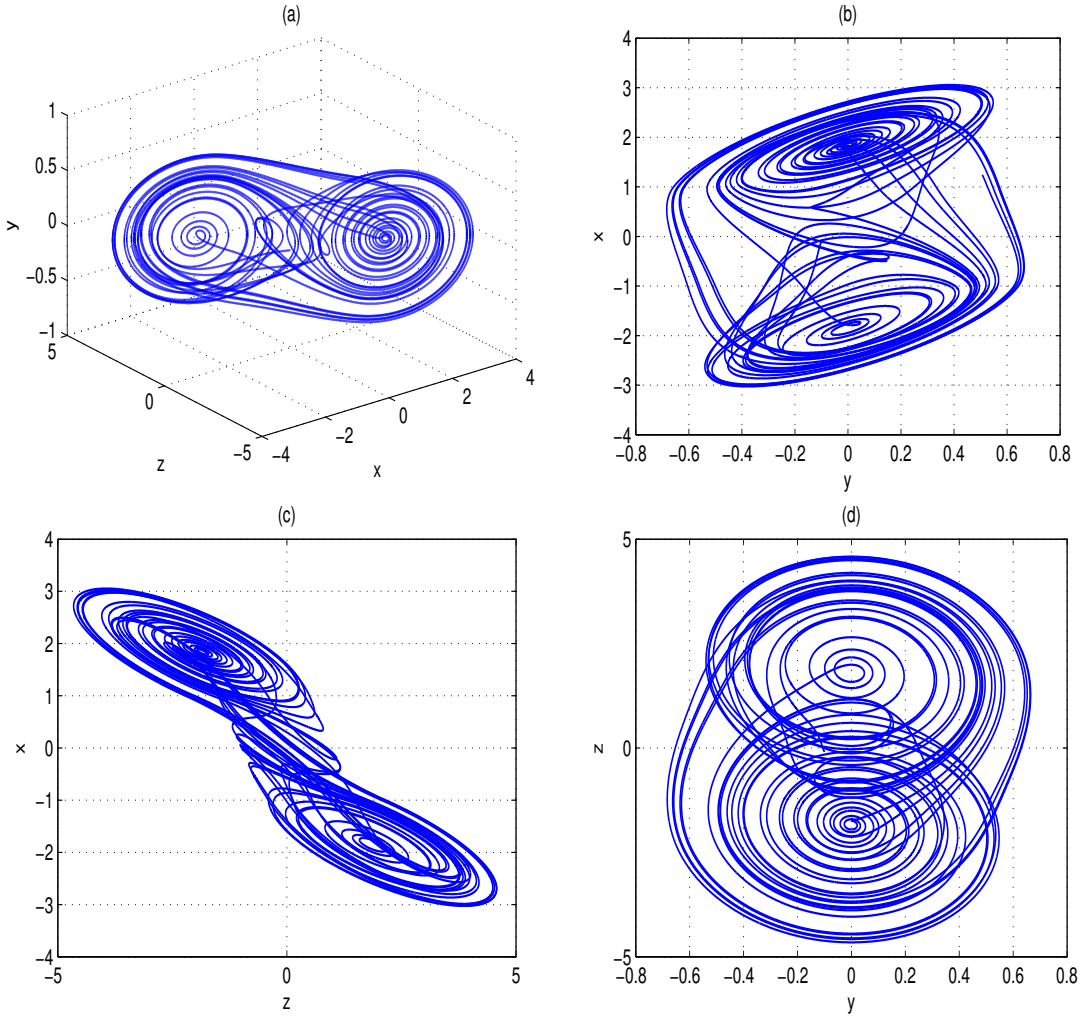


FIGURE 1.9 – Plan de phases du Système de Chua : (a) Attracteur 3D, (b) Plan de phase XY, (c) Plan de phase XZ, (d) Plan de phase YZ.

1.5.6 Sensibilité aux conditions initiales

La sensibilité aux conditions initiales est la signature caractéristique d'un système chaotique. Pour illustrer ce comportement, nous avons simulé la dynamique du système (1.6) à partir de deux conditions initiales très proches :

$\mathbf{X}_0 = (-0.1, -0.1, -0.1)$

$\mathbf{X}'_0 = (-0.1 + 10^{-14}, -0.1, -0.1)$

Nous analysons l'évolution temporelle des variables d'état (x, y, z) ainsi que l'écart entre les deux trajectoires

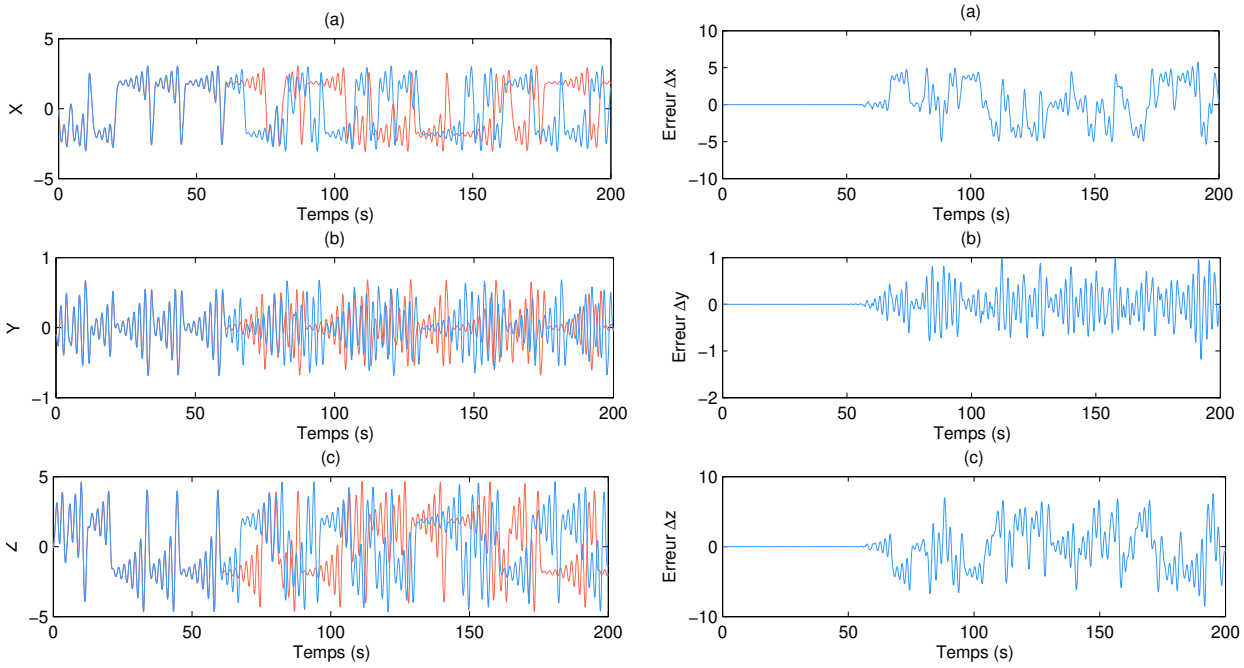


FIGURE 1.10 – Sensibilité aux conditions initiales et divergence des trajectoires pour le système de Chua : $X_0 = (-0.1, -0.1, -0.1)$ (En rouge), $X_0' = (-0.1 + 10^{-14}, -0.1, -0.1)$ (En bleu), (a) $x(t)$, (b) $y(t)$, (c) $z(t)$.

Les deux courbes de la figure (1.10) montrent que, jusqu'à environ 60s, les trajectoires issues de conditions initiales quasiment identiques restent superposées, puis commencent à diverger brutalement. Les graphiques d'erreur Δx, Δy, Δz révèlent une croissance quasi nulle au début, suivie d'une montée rapide et irrégulière – signature d'un comportement chaotique et d'une sensibilité extrême aux conditions initiales.

1.5.7 Exposants de Lyapunov

Les exposants de Lyapunov caractérisent la sensibilité d'un système dynamique aux conditions initiales en quantifiant le taux moyen d'expansion ou de contraction des orbites dans l'espace des phases. Pour un système 3D comme (1.3), on obtient trois exposants (λ_1, λ_2, λ_3) où :

— $\lambda_1 > 0$ indique un comportement chaotique (divergence exponentielle des trajectoires proches).

— $\lambda_2 \approx 0$ correspond à la direction tangentielle à la trajectoire.

— $\lambda_3 < 0$ reflète la contraction du système dans une direction de l'espace des phases.

1.5.8 Méthode de calcul des exposants de Lyapunov

Pour calculer les exposants de Lyapunov, le système (1.6) est couplé à son équation variationnelle [16] :

$$\dot{\mathbf{Y}} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}(\mathbf{X}) \\ \mathbf{J}(\mathbf{X}) \cdot \mathbf{Q} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Y} = [\mathbf{X}; \mathbf{Q}]$$

où $\mathbf{J}(\mathbf{X})$ est la matrice jacobienne et $\mathbf{Q}$ représente les perturbations infinitésimales.

À chaque pas de temps Δt, on effectue une décomposition QR[17] :

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_{\text{new}} \cdot \mathbf{R}$$

Les éléments diagonaux R_{ii} quantifient l'expansion/contraction locale.

Les exposants sont obtenus par moyenne temporelle [18] :

$$\lambda_i = \frac{1}{T_{\max}} \sum_{k=1}^{N} \log |R_{ii}(k)|$$

où $T_{\max} = N \cdot \Delta t$.

1.5.9 Spectre des exposants de lyapunov

TABLE 1.1 – Étude comparative du comportement dynamqiue

Cas	**LEs**	**Comportement dynamique**
(01)	$\text{LE}_1 = 0$ $\text{LE}_2 < 0$ $\text{LE}_3 < 0$	Périodique
(02)	$\text{LE}_1 = 0$ $\text{LE}_2 = 0$ $\text{LE}_3 < 0$	Quasipériodique
(03)	$\text{LE}_1 > 0$ $\text{LE}_2 = 0$ $\text{LE}_3 < 0$	Chaotique
(04)	$\text{LE}_1 < 0$ $\text{LE}_2 < 0$ $\text{LE}_3 < 0$	Converge vers les points d'équilibres

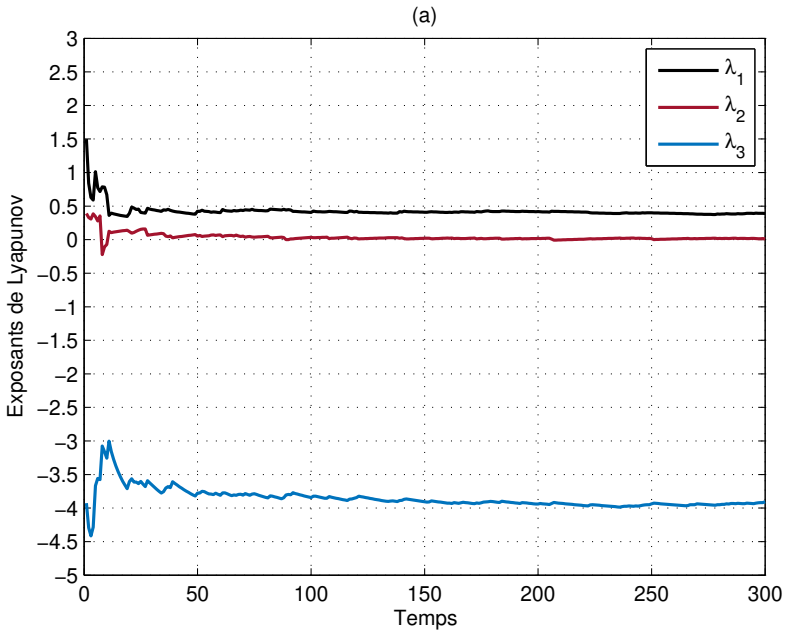


FIGURE 1.11 – Évolution des exposants de Lyapunov

.

L'analyse des exposants de Lyapunov ($\lambda_1 \approx 0.42 > 0$, $\lambda_2 \approx 0$, $\lambda_3 \approx -3.83 < 0$) révèle que le système présente une dynamique chaotique et dissipative.

La valeur positive de λ_1 signale une forte sensibilité aux conditions initiales, caractéristique du chaos. L'exposant λ_2 proche de zéro suggère une direction de stabilité neutre au sein du système. Enfin, l'exposant négatif λ_3 indique une contraction rapide du volume dans l'espace des phases, typique d'un comportement dissipatif.

La coexistence de ces exposants est une signature des systèmes chaotiques dissipatifs, qui peuvent exhiber des attracteurs étranges [19]. La somme $\sum_{i=1}^{3} \lambda_i < 0$ confirme la nature dissipative du système (1.6) [20].

1.6 Système de Chen

Le système de Chen est un système chaotique continu défini par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \dot{x} = a(y - x) \\ \dot{y} = (c - a - z)x + cy \\ \dot{z} = xy - bz \end{cases} \tag{1.9}$$

La première phase de cette étude consiste à analyser et caractériser les propriétés fondamentales du système étudié en mobilisant les concepts de la théorie des systèmes dynamiques non linéaires.

Ce système admet trois points d'équilibre : l'origine $C_0 = (0, 0, 0)$, et deux points fixes symétriques :

$$C_+ = \left(\sqrt{b(2c-a)},\ \sqrt{b(2c-a)},\ 2c-a\right)$$
$$C_- = \left(-\sqrt{b(2c-a)},\ -\sqrt{b(2c-a)},\ 2c-a\right)$$

1.6.1 Diagramme e bifurcation du système de Chen

Cette étude examine un système dynamique défini par les paramètres fixes (a, b) = (35, 3), où c est traité comme paramètre variable. Pour différentes valeurs de c, nous analysons le taux de divergence entre les orbites générées par les évolutions du système. Les résultats révèlent des comportements dynamiques distincts selon les valeurs de c. L'analyse est conduite à partir des conditions initiales (x, y, z) = (-3, 2, 20). En se basant sur le diagramme de bifurcation de la figure (1.12), alors l'évolution du système en fonction de la variation du paramètre c, se caractérise par trois transitions qualitatives distinctes dans son comportement.

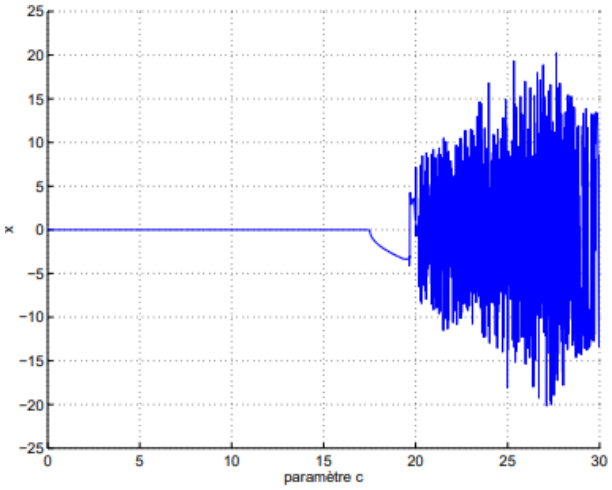


FIGURE 1.12 – Diagramme de bifurcation du système de Chen.

.

1.6.2 Analyse du comportement dynamique du système de Chen

Pour des valeurs de $c < 17.5$ de la figure (1.13), le système présente une stabilité autour du point d'équilibre C_0. Indépendamment du point initial, toutes les trajectoires convergent

vers ce point.

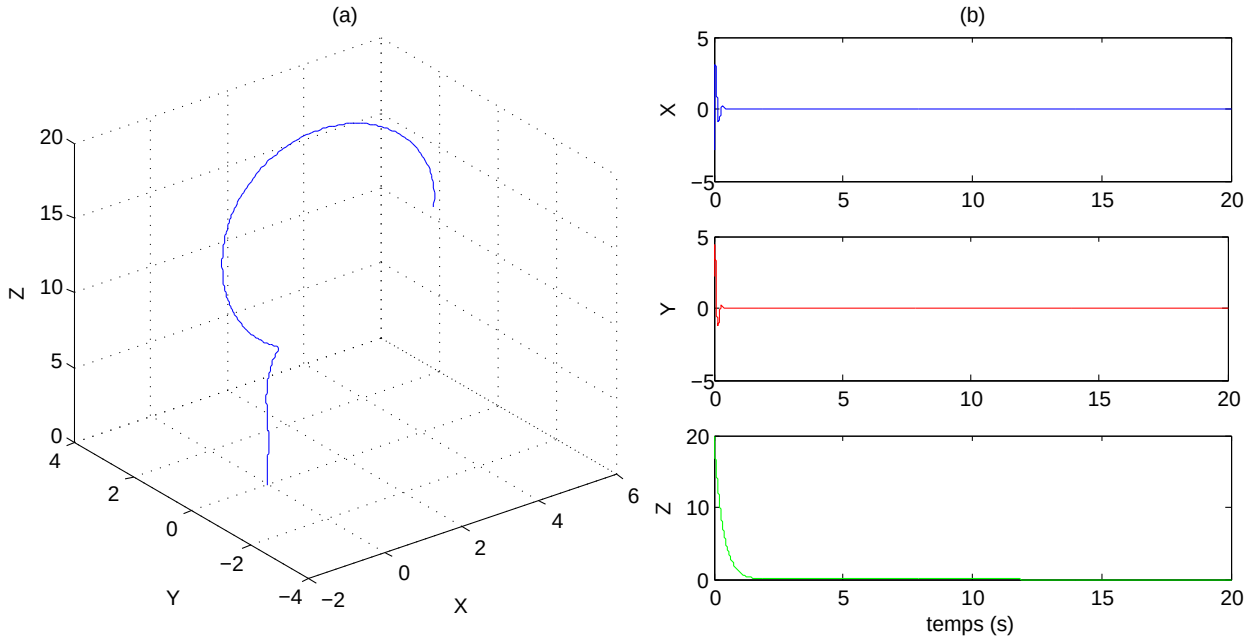


FIGURE 1.13 – Système de Chen pour c=15 : (a) Attracteur 3D, (b) Évolutions temporelles

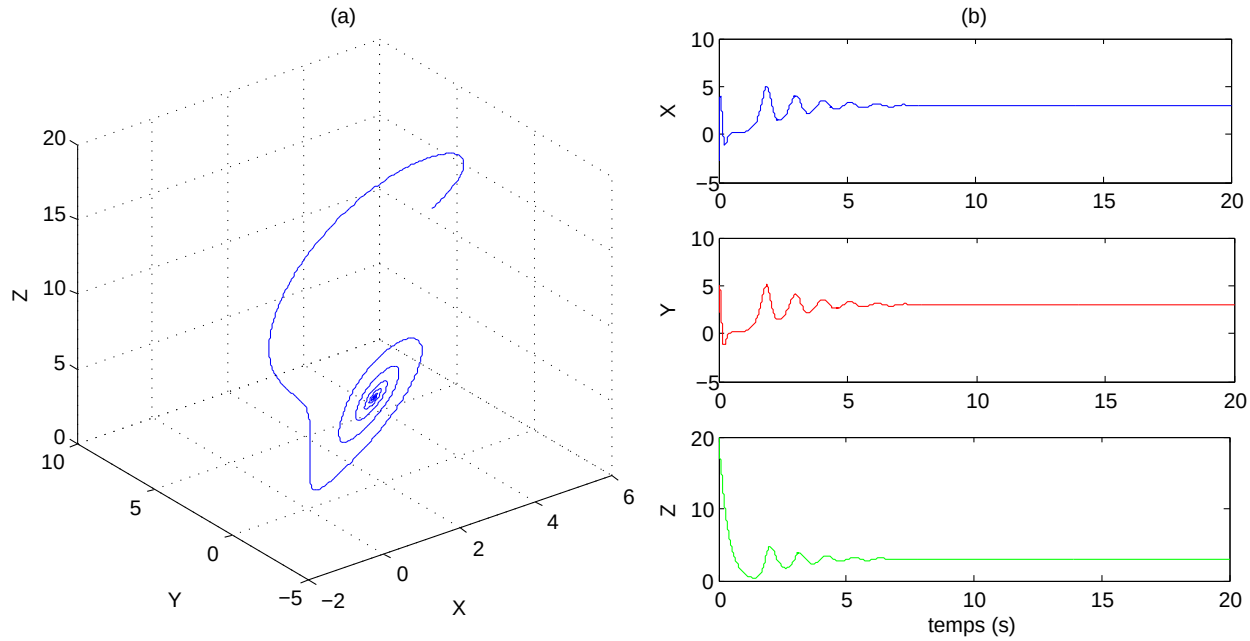


FIGURE 1.14 – Système de Chen pour c=19 : (a) Attracteur 3D, (b) Évolutions temporelles

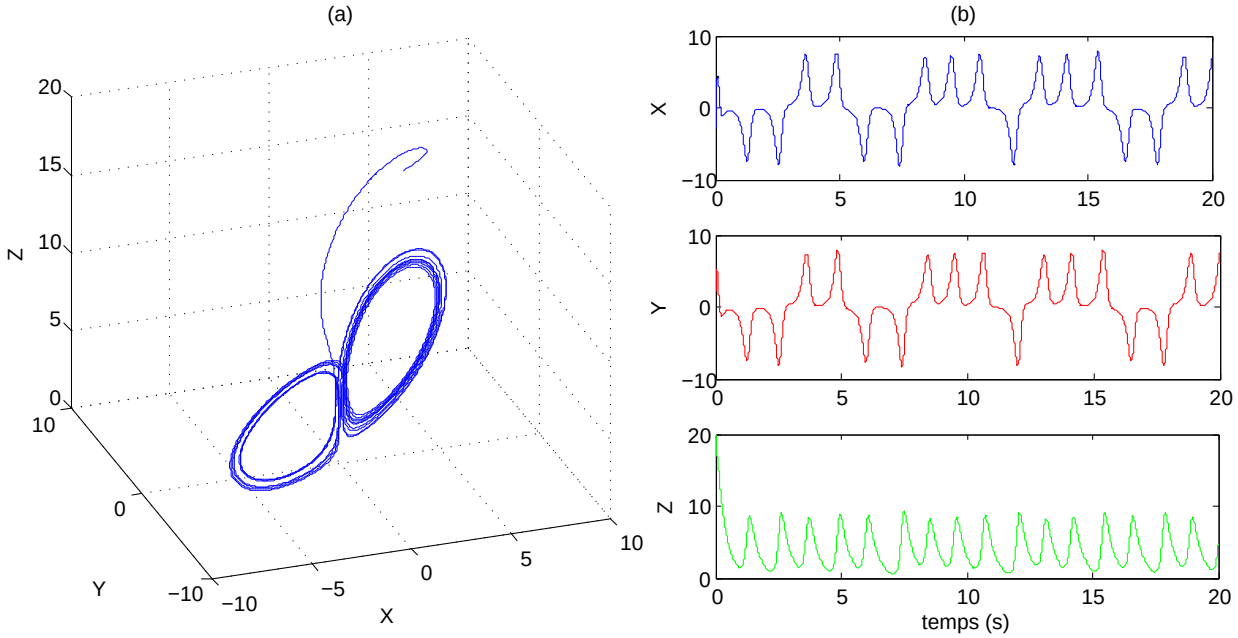


FIGURE 1.15 – Système de Chen pour c=20.07 : (a) Attracteur 3D, (b) Évolutions temporelles

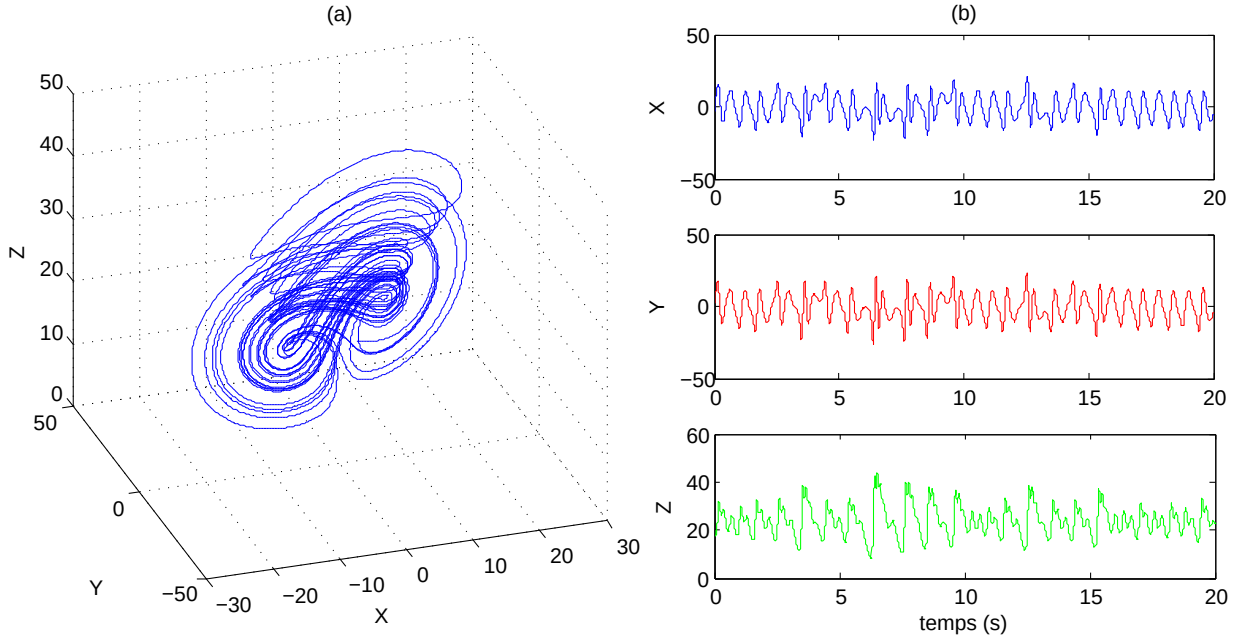


FIGURE 1.16 – Système de Chen pour c=28 : (a) Attracteur 3D, (b) Évolutions temporelles

Lorsque c se situe dans l'intervalle $[17.5, 20.07]$, comme montré au figure (1.14), le com-

portement du système se modifie qualitativement. Le point d'équilibre C_0 perd sa stabilité, et le système converge désormais vers un point fixe C_+

Dans la figure (1.16), à $c = 20.07$, la perte de stabilité des points fixes C_+ et C_-.

Pour $c > 20.07$,on voit dans la figure (1.16) que le système ne contient plus de point fixe stable et son comportement devient chaotique. L'état du système est alors imprévisible, avec une trajectoire évoluant continuellement autour d'un attracteur.

Nous nous intéressons particulièrement au dernier cas de la figure (1.16), qui présente un attracteur étrange pour les valeurs paramétriques (a, b, c) = (35, 3, 28).

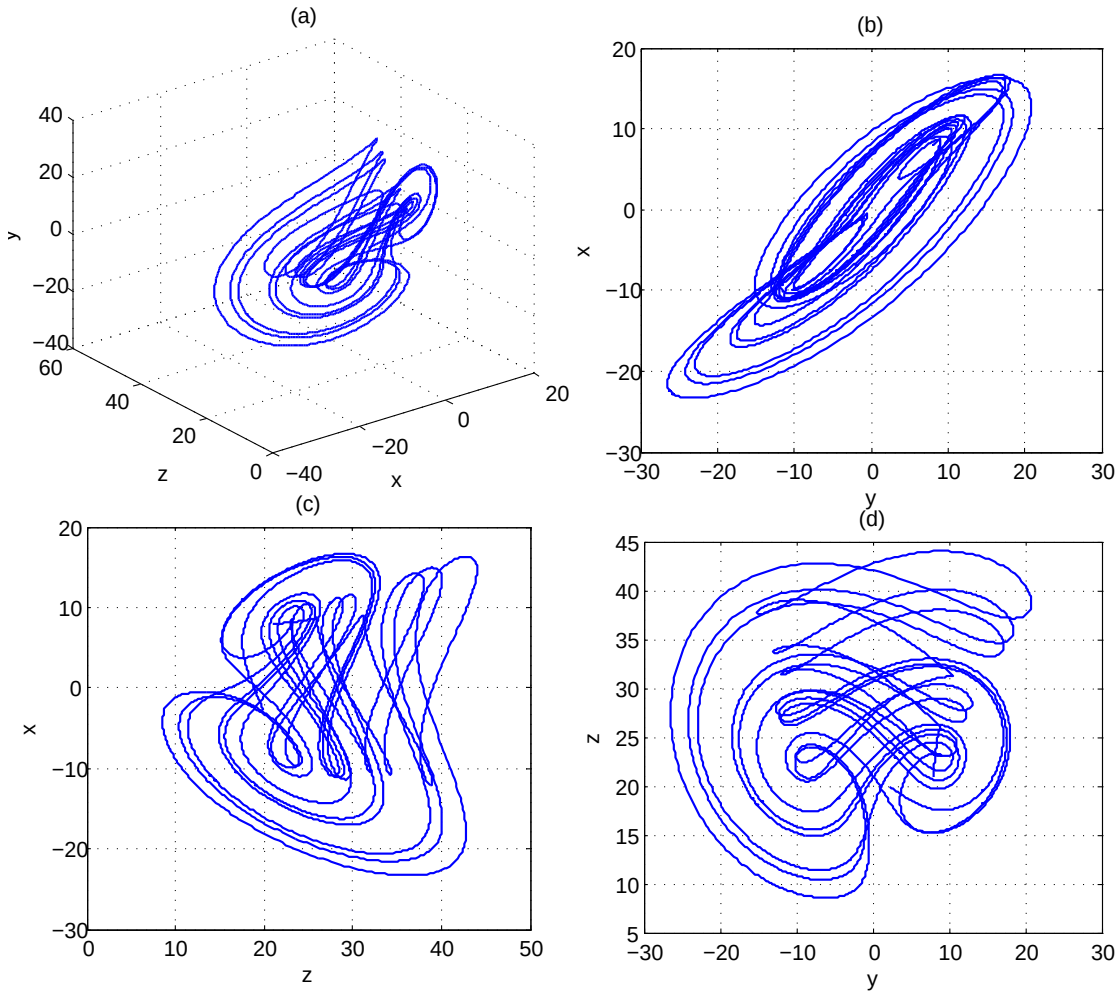


FIGURE 1.17 – Plan de phases du Système de Chen : (a) Attracteur 3D, (b) Plan de phase XY, (c) Plan de phase XZ, (d) Plan de phase YZ

Les simulations confirment l'émergence d'un chaos déterministe dans le système (1.9), matérialisé par un attracteur étrange. La structure repliée dans l'espace des états, ainsi

que les projections des plans de phase, mettent en évidence une dynamique complexe et apériodique.

1.6.3 Sensibilité aux conditions initiales du système de Chen

La sensibilité aux conditions initiales est une propriété caractéristique des systèmes chaotiques. Pour illustrer ce phénomène, nous avons simulé la dynamique du système (1.9) à partir de deux conditions initiales très proches :

$$\mathbf{x}_0^{(1)} = (-3,\ 2,\ 20), \quad \mathbf{x}_0^{(2)} = (-3 + 10^{-5},\ 2,\ 20)$$

Nous avons ensuite observé l'évolution temporelle des variables d'état $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, ainsi que l'écart entre les trajectoires correspondantes, afin de mettre en évidence la divergence typique des systèmes chaotiques.

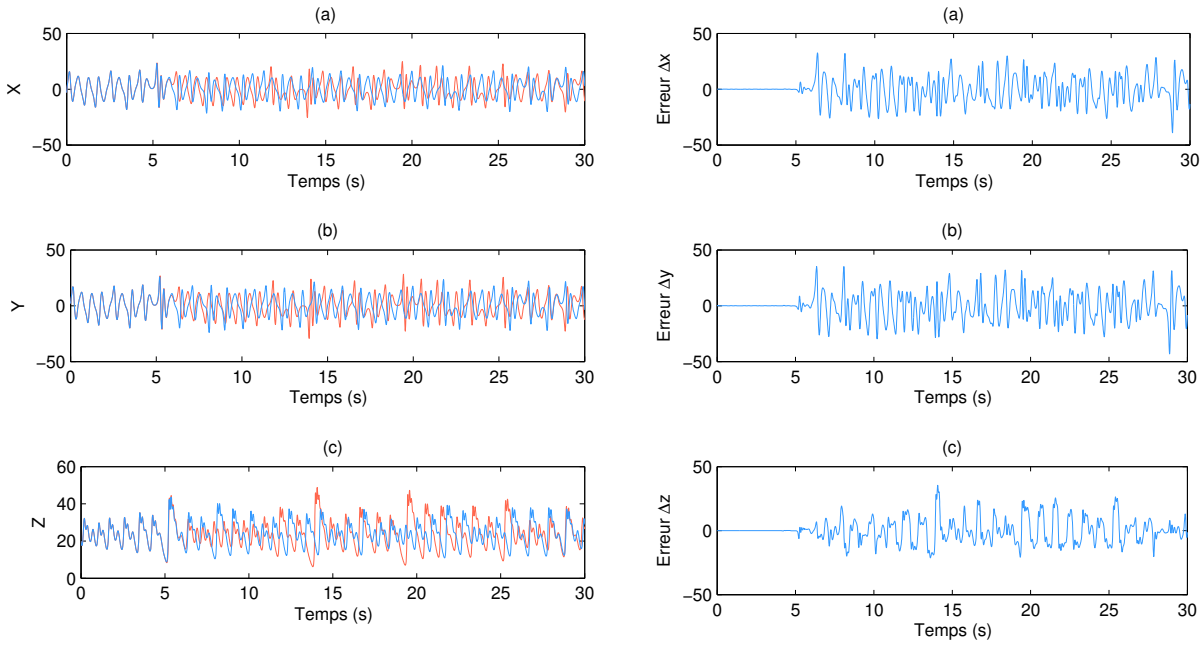


FIGURE 1.18 – Sensibilité aux conditions initiales et divergence des trajectoires pour le système de Chen : $X_1 = (-3, 2, 20)$ (En rouge), $X_2 = (-3 + 10^{-5}, 2, 20)$ (En bleu), (a) $x(t)$, (b) $y(t)$, (c) $z(t)$.

La figure (1.18) illustre parfaitement le phénomènes fondamental des systèmes chaotiques : la sensibilité aux conditions initiales. Deux simulations du système de Chen ont été réalisées à partir de conditions initiales très proches. Dès le début, une divergence nette est observée

entre les courbes, illustrant la sensibilité extrême aux conditions initiales, caractéristique des systèmes chaotiques. Cette évolution rapide de l'écart, visible sur les courbes d'erreur, démontre que même une perturbation infime peut entraîner des comportements complètement différents. Ce phénomène met en évidence l'imprévisibilité inhérente aux systèmes chaotiques comme celui de Chen.

1.6.4 Exposant de lyaponov du système de Chen

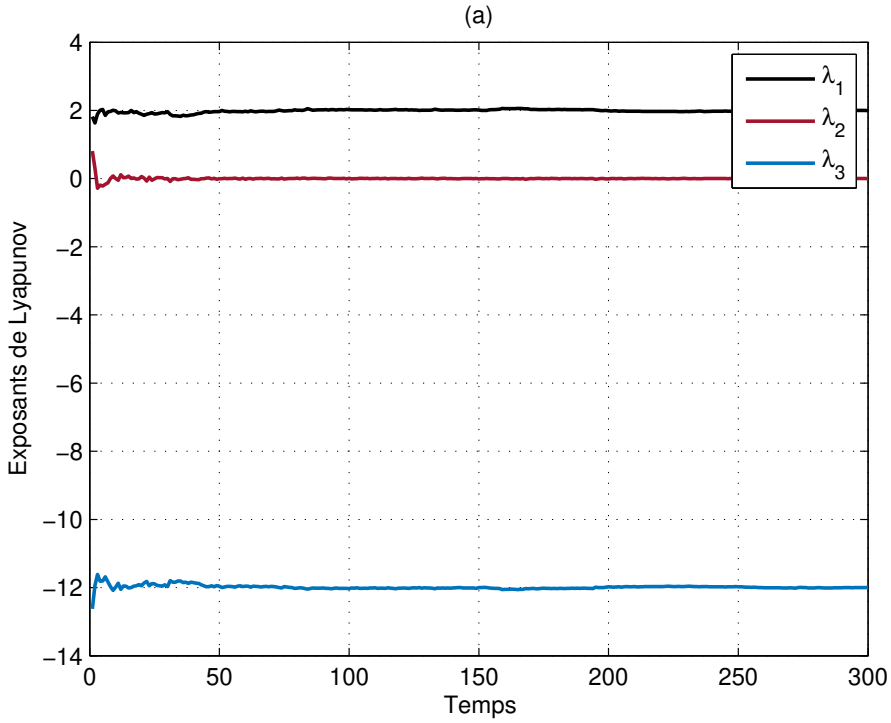


FIGURE 1.19 – Évolution des exposants de Lyapunov du système de Chen

Les exposants de Lyapunov calculés sont $\lambda_1 = 1{,}9963 > 0$, $\lambda_2 \approx 0$ et $\lambda_3 = -11{,}9913 < 0$, ce qui confirme la nature chaotique du système de Chen. La présence d'un exposant strictement positif indique une forte sensibilité aux conditions initiales, typique d'un comportement chaotique. L'exposant nul correspond à la direction de la trajectoire, tandis que l'exposant négatif traduit une contraction dans l'espace des phases.

1.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons exploré en profondeur le comportement chaotique de deux systèmes non linéaires emblématiques : le circuit de Chua insi que le système de Chen. À travers la modélisation mathématique, la simulation numérique et l'analyse des trajectoires, nous avons mis en évidence des caractéristiques fondamentales du chaos telles que la sensibilité aux conditions initiales, la transition vers des régimes complexes via la route vers le chaos, et la structure des attracteurs étranges.

L'étude des exposants de Lyapunov a permis de quantifier rigoureusement cette dynamique. En particulier, la présence d'un exposant strictement positif dans les deux systèmes confirme leur nature chaotique et leur comportement imprévisible à long terme. La méthode de Benettin, appliquée pour le calcul de ces exposants, s'est révélée efficace pour mettre en évidence la divergence exponentielle des trajectoires proches.

Cette analyse met en lumière l'importance des outils issus de la théorie des systèmes dynamiques pour comprendre et caractériser des phénomènes complexes dans des circuits électroniques ou des modèles physiques. Elle constitue également une base solide pour l'étude de le contrôle du chaos dans les travaux futurs.

Bibliographie

[1] Abdelkrim Boukabou and Nora Mansouri. Méthodes de controle des systèmes chaotiques d'ordre élevé et leur application pour la synchronisation. 2006.

[2] Bounehal Achouak and Zaabal Dounia. *Etude de la dynamique chaotique du système de Rossler.* PhD thesis, university center of abdalhafid boussouf-MILA, 2023.

[3] Souhila Bazoula, Souad Belhennache, and Président Mr Nasr-Eddine Hamri. Controle d'un système dynamique chaotique.

[4] Labed Boudjema MAA, Meskine Habiba MAA, and Boujerrida Nadjet MAA. Controle du chaos d'un système dynamique discret.

[5] Alin François. *Contribution à la prédiction et au contrôle des comportements apériodiques dans les convertisseurs électromécaniques : application de la théorie du chaos.* Thèse de doctorat, Université de Reims Champagne-Ardenne, 2005.

[6] Hamiche Hamid et al. *Etude et réalisation d'un système chaotique basé sur le circuit de CHUA.* PhD thesis, Université Mouloud Mammeri, 2014.

[7] Atman Kahina and Khettaoui Fatma. *Synchronisation impulsive de deux systèmes chaotiques de Colpitts.* Thèse de doctorat, Université Mouloud Mammeri, 2011.

[8] Boukabou Abdelkrim. *Méthodes de contrôle des systèmes chaotiques d'ordre élevé et leur application pour la synchronisation : Contribution à l'élaboration de nouvelles approches.* PhD thesis, Université de Constantine, June 2016.

[9] Kestutis Pyragas. Continuous control of chaos by self-controlling feedback. *Physics letters A*, 170(6) :421–428, 1992.

[10] Meriem Meliouh. Contrôle de système chaotique de chua.

[11] Abdelkrim Boukabou and Nora Mansouri. Controlling chaos in higher-order dynamical systems. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 14(11) :4019–4025, 2004.

[12] Leon O. Chua. Chua circuit. *Scholarpedia*, 2(10) :1488, 2007.

[13] Ait Hammi Abdelfateh. *Etude et réalisation d'un système chaotique basé sur le circuit de CHUA*. PhD thesis, Université Mouloud Mammeri, 2014.

[14] T. Matsumoto. Chaotic attractor in a third-order circuit. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, CAS-31(12), December 1984.

[15] Lionel Velut. *Controle par le musicien des régimes d'oscillation des instruments de la famille des cuivres*. PhD thesis, AMU-Aix Marseille Université, 2016.

[16] Alan Wolf, Jack B. Swift, Harry L. Swinney, and John A. Vastano. Determining lyapunov exponents from a time series. *Physica D : Nonlinear Phenomena*, 16(3) :285–317, 1985.

[17] Giancarlo Benettin, Luigi Galgani, Antonio Giorgilli, and Jean-Marie Strelcyn. Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for hamiltonian systems. *Meccanica*, 15 :9–20, 1980.

[18] Jean-Pierre Eckmann and David Ruelle. Ergodic theory of chaos and strange attractors. *Reviews of Modern Physics*, 57(3) :617–656, 1985.

[19] Steven H Strogatz. *Nonlinear dynamics and chaos : with applications to physics, biology, chemistry, and engineering*. Chapman and Hall/CRC, 2024.

[20] Tomasz Kapitaniak. *Chaos for Engineers : Theory, Applications, and Control*. Springer-Verlag, 1994.

[21] A. Boukabou and N. Mansouri. Controlling multiple unstable periodic orbits of the n-scroll chua's circuit. In *Proceedings of ENOC-2005*, 2005.

[22] H. Gottlieb. What is the simplest jerk function that gives chaos ? *American Journal of Physics*, 64(5) :525, 1996.

[23] A. Lassoued and O. Boubaker. A new fractional-order jerk system and its hybrid synchronization. In *Fractional Order Control and Synchronization of Chaotic Systems*, pages 699–718. Springer, 2017.

[24] A. Wolf, J. B. Swift, H. L. Swinney, and J. A. Vastano. Determining lyapunov exponents from a time series. *Physica D : Nonlinear Phenomena*, 16(3) :285–317, 1985.

[25] E. Campos-Cantón. Chaotic attractors based on unstable dissipative systems via third-order differential equation. *International Journal of Modern Physics C*, 27(01) :1–11, 2016.

[26] Chouaib Benhabib. Étude d'un système chaotique pour la sécurisation des communications optiques. Master's thesis, Université de Tlemcen, Faculté de Technologie, Tlemcen, Algérie, June 2014.